BAOU
Education for All

ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી

(ગુજરાત સરકાર દ્વારા સ્થાપિત)

તૃતીય વર્ષ બી.કોમ.

BCSTA306

આંકડાશાસ્ત્ર

BAOU Education for all

ડૉ.બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી

(ગુજરાત સરકાર દ્વારા સ્થાપિત)

તૃતીય વર્ષ બી.કોમ.
BCSTA 306
આંકડાશાસ્ત્ર

આંકડાશાસ્ત્ર

લેખન :	ડૉ.પરાગ શાહ	એસોસિએટ પ્રોફેસર, એચ.એલ.કૉલેજ ઑફ કૉમર્સ, અમદાવાદ.
	ડૉ.મિતેશ શાહ	એસોસિએટ પ્રોફેસર, એસ.વી.વાણિજ્ય મહાવિદ્યાલય, અમદાવાદ.
	ડૉ.કુંજલ શાહ	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, શ્રી સહજાનંદ વાણિજ્ય મહાવિદ્યાલય, અમદાવાદ.
	ડૉ.કલ્પેશ વાંકાણી	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર, ક્રાઈસ્ટ કૉલેજ, રાજકોટ.
પરામર્શક (વિષય) :	પ્રો. (ડૉ.) મનોજ શાહ	પ્રોફેસર અને નિયામક, સ્કૂલ ઑફ કૉમર્સ એન્ડ મેનેજમેન્ટ, ડૉ.બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી,અમદાવાદ.
	ડૉ.શુભા લાગવણકર	એસોસિએટ પ્રોફેસર, એચ.એ.કૉલેજ ઑફ કૉમર્સ, અમદાવાદ.
	ડૉ.ડેલનાઝ જોખી	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર (આંકડાશાસ્ત્ર), જે.જી.કૉલેજ ઑફ કૉમર્સ, અમદાવાદ.
પરામર્શક (ભાષા) :	ડૉ.દિનુ ચુડાસમા	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર (ગુજરાતી) ડૉ.બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી,અમદાવાદ.
	શ્રી ઉર્વિકા પટેલ	આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર (ગુજરાતી) ડૉ.બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી,અમદાવાદ.
સંયોજક :	પ્રો.(ડૉ.) મનોજ શાહ	પ્રોફેસર અને નિયામક,સ્કૂલ ઑફ કૉમર્સ એન્ડ મેનેજમેન્ટ, ડૉ.બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી,અમદાવાદ.
પ્રકાશક :	ડૉ.ભાવિન ત્રિવેદી	કાર્યકારી કુલસચિવ ડૉ.બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી,અમદાવાદ.

ISBN : 978-81-941578-3-0

"978-81-941578-3-0"

એકમ 1 માહિતી એકત્રીકરણ અને પ્રાપ્તિસ્થાનો

1.1 પ્રસ્તાવના

એકવીસમી સદી એ ઈન્ફોર્મેશન ટેક્નોલોજી (IT)ની સદી છે અને Information એટલે માહિતી. આમ બીજા અર્થમાં કહીએ તો આ સદી માહિતીની સદી છે. એટલે કે જે વ્યક્તિ/સંસ્થા/દેશ પાસે વધુ, વહેલી અને સચોટ માહિતી હોય અને જો તેનો યોગ્ય ઉપયોગ કરવામાં આવે તો સરળતાથી યોગ્ય નિર્ણય લઈ શકાય છે.

માહિતીની ઉપયોગિતા પહેલાના જમાનામાં પણ હતી અને એટલે જ આરંભમાં રાજ્યની વસ્તી, લશ્કરી તાકાત (જેમકે હાથી, ઘોડા, સૈનિકો), વેપારમાં મહેસૂલ (કયાંથી કેટલો કર લીધો), જન્મ મૃત્યુનાં આંકડા આમ વિવિધ વિષયોની માહિતી મેળવવામાં આવતી હતી. સમય જતાં ટેક્નોલોજીકલ ડેવલપમેન્ટ (તકનીકી વિકાસ)ને લીધે હવે ઉપરના વિષયો ઉપરાંત આપણે જુદા-જુદા સ્થળનું વાતાવરણ અથવા વિવિધ વસ્તુઓ વિશે પ્રમાણમાં સરળતાથી માહિતી મળી રહે છે. દા.ત. કોઈ એક સ્થળનાં વાતાવરણની માહિતી મેળવવી હોય તો તે જગ્યાએ યોગ્ય સેન્સર મૂકીને (તાપમાનની / ભેજનાં પ્રમાણની) જરૂરી માહિતી મેળવી શકાય છે. આપણે જ્યારે વાહન લઈને એક જગ્યાથી બીજી જગ્યાએ મુસાફરી કરતાં હોઈએ છીએ અને રસ્તા પર કેટલો ટ્રાફિક જામ છે તેની માહિતી આપણે ગુગલ મેપ પરથી મેળવી શકીએ છીએ. આમ ટેક્નોલોજીની મદદથી આપણે ખૂબ જ ટૂંક સમયમાં સચોટ માહિતી મેળવી શકીએ છીએ અને આપણો સમય બચાવી શકીએ છીએ. આમ માહિતી એ આજના યુગનો પ્રાણ છે અને જાણે અજાણે આપણે એક યા બીજા પ્રકારે માહિતીનો ઉપયોગ કરીને નિર્ણય લેતા હોઈએ છીએ. આંકડાશાસ્ત્રનો આધાર માહિતી પર છે તેથી માહિતી કોને કહેવાય તે સમજવું ખૂબ જ જરૂરી છે.

કોઈ પણ વિષય-વસ્તુનો અભ્યાસ કરવા માટે તેના જુદા-જુદા પરિમાણોને ધ્યાનમાં રાખીને જે તથ્યો કે હકીકતો કે આંકડાઓ મેળવવામાં આવે છે તેને માહિતી કહે છે. **દા.ત.** ધારો કે આપણે ફોન ખરીદવો હોય તો ફોનના વિવિધ લક્ષણો કે ગુણધર્મો જેવા કે કઈ કંપનીનો ફોન છે, ડિસ્પ્લે સ્ક્રીનની સાઈઝ (માપ) શું છે, કેટલી મેમરી છે, કેટલી કિંમત છે વગેરે માહિતી મેળવીએ છીએ અને પછી તેના આધારે યોગ્ય નિર્ણય લઈએ છીએ અને ફાયદો મેળવી શકીએ છીએ.

આમ, અભ્યાસ હેઠળના એકમોનો સમૂહ (સમષ્ટિ) અથવા સમષ્ટિમાંથી યદચ્છ રીતે પસંદ કરેલ એકમોનો સમૂહ (નિદર્શ)ના તમામ એકમોના એક અથવા વધારે ચલ લક્ષણો (પરિમાણો) વિશે જે તથ્યો અથવા આંકડા મેળવવામાં આવે છે તેને માહિતી કહે છે. દા.ત. T.Y.B.Com.ના વિદ્યાર્થીઓની જાતિ (છોકરો/છોકરી), તેમની ઊંચાઈ, તેમના ઘરના સભ્યોની સંખ્યા, તેમના આંકડાશાસ્ત્રના ગુણ વગેરેને માહિતી કહે છે. આમ આંકડાશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં માહિતી પાયાનું સ્થાન ધરાવે છે અને તેથી જ મેળવેલી માહિતી, વર્ગીકરણ અને પૃથકકરણનું કામ કાળજી પૂર્વકનો અભ્યાસ માંગી લે છે. આ માટે જે શાસ્ત્રનો વિકાસ થયો તે આંકડાશાસ્ત્ર.

માહિતીના અભ્યાસમાં જો અભ્યાસ હેઠળના એકમનું લક્ષણ માપી શકાય તેવું હોય તો તેને ચલનાત્મક/સંખ્યાત્મક માહિતી કહે છે. ઉપરના ઉદાહરણમાં વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ, ગુણ વગેરે ચલનાત્મક માહિતી છે. જ્યારે તેમની જાતિ એ એક ગુણધર્મ થયો આથી તેને ગુણાત્મક માહિતી કહે છે. કોઈ વ્યક્તિની પ્રમાણિકતા, ફૂલની સુગંધ, વાળનો રંગ વગેરે ગુણધર્મ હોવાથી તેને ગુણાત્મક માહિતી કહે છે.

આંકડાશાસ્ત્રીય માહિતીને મુખ્યત્વે બે પ્રકારમાં વહેંચી શકાય. પ્રાથમિક માહિતી અને ગૌણ માહિતી.

પ્રાથમિક માહિતી : જ્યારે કોઈ વ્યક્તિ કે સંસ્થા પોતાની જાતે અથવા અન્ય કોઈ વ્યક્તિ કે સંસ્થાની મદદ લઈને પ્રથમવાર માહિતી મેળવે તો તેને પ્રાથમિક માહિતી કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. દર 10 વર્ષે થતી વસ્તી ગણતરી એ પ્રાથમિક માહિતીનું ઉદાહરણ છે. આ ઉપરાંત એક શિક્ષક વિદ્યાર્થીને તેનાં કુટુંબનાં સભ્યોની સંખ્યા, વિદ્યાર્થી કેટલે દૂરથી આવે છે, કઈ રીતે આવે છે, આ બધી માહિતી વિદ્યાર્થીને પ્રથમ વખત પૂછીને મેળવે તો તે માહિતી શિક્ષક માટે પ્રાથમિક માહિતી થાય.

ગૌણ માહિતી : જ્યારે અન્ય વ્યક્તિ કે સંસ્થાએ મેળવેલ માહિતીનો ઉપયોગ કોઈ વ્યક્તિ કે સંસ્થા કરે તો તે માહિતી તે વ્યક્તિ કે સંસ્થા માટે ગૌણ માહિતી કહેવાય છે.

દા.ત. ભારત સરકાર વસ્તી ગણતરીના આંકડા પ્રકાશિત કરે અને અન્ય વ્યક્તિ તેનો ઉપયોગ કરે તો તે વ્યક્તિ ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરે છે. આ ઉપરાંત આપણે છાપું વાંચીએ, ટી.વી. જોઈએ, ઈન્ટરનેટનો ઉપયોગ કરીને માહિતી મેળવીએ છીએ ત્યારે તે માહિતી બીજા કોઈએ પહેલેથી એકઠી કરેલ હોય છે અને આપણે તેનો ઉપયોગ કરીએ છીએ આથી તે માહિતી પણ આપણા માટે ગૌણ માહિતી કહેવાય.

આમ, આપણે જાતે માહિતી મેળવીએ (કે કોઈના દ્વારા મેળવાઈ હોય) તો તે માહિતી આપણા માટે પ્રાથમિક માહિતી બને. જ્યારે બીજાએ પોતાને માટે મેળવેલ માહિતીનો આપણે ઉપયોગ કરીએ તો તે આપણા માટે ગૌણ માહિતી બને.

1.2 પ્રાથમિક અને ગૌણ માહિતી વચ્ચે તફાવત :

	પ્રાથમિક માહિતી		ગૌણ માહિતી
1.	પ્રાથમિક માહિતી હેતુ અનુરૂપ નવેસરથી (પ્રથમ વખત) મેળવવામાં આવે છે.	1.	ગૌણ માહિતી બીજી વ્યક્તિએ અન્ય અથવા એ જ હેતુ માટે એકઠી કરેલી હોય છે.
2.	તેને સંગૃહીત કરવાનો અને ઉપયોગ કરવાનો હેતુ સમાન હોય છે.	2.	ગૌણ માહિતીને એકઠી કરવાનો અને ઉપયોગ કરવાનો હેતુ જુદો હોઈ શકે છે.
3.	માહિતી એકઠી કરનાર વ્યક્તિ તેની ખૂબી-ખામીથી પરિચિત હોય છે.	3.	બીજા દ્વારા એકઠી કરેલી હોવાથી ખૂબી-ખામી (લક્ષણો/ મર્યાદાઓ)ની જાણકારી (ઓછી હોય છે) હોતી નથી.
4.	વિસ્તૃત સ્વરૂપે હોય છે.	4.	સંક્ષિપ્તમાં - કુલ આંકડા, ટકાવારી સ્વરૂપે હોય છે.
5.	સમય, શ્રમ, નાણાંનો વધારે વપરાશ થાય છે.	5.	સમય, શ્રમ, નાણાંનો બચાવ થાય છે.
6.	વધુ ચોક્કસ અને વિશ્વાસપાત્ર હોય છે.	6.	પ્રમાણમાં ઓછી ચોકસાઈ અને વિશ્વાસપાત્રતા ધરાવે છે.
7.	મૂળ માહિતી હોવાથી સામયિકો, પ્રકાશનોમાંથી મેળવી શકાતી નથી.	7.	સામયિકો કે અન્ય પ્રકાશનોમાંથી મેળવી શકાય છે.
8.	પ્રાથમિક માહિતીનો ફરીથી ઉપયોગ થાય તો તે ગૌણ માહિતી બની જાય છે.	8.	ગૌણ માહિતીનો ગમે તેટલી વખત ઉપયોગ કરતાં તે ગૌણ માહિતી જ રહે છે.

1.3 પ્રાથમિક માહિતી એકત્રીકરણની પદ્ધતિઓ :

પ્રાથમિક માહિતી મેળવવા માટે પ્રત્યક્ષ તપાસ, પરોક્ષ તપાસ અને પ્રશ્નાવલીની રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

પ્રત્યક્ષ તપાસ (રૂબરૂ મુલાકાત દ્વારા સીધી તપાસ) : જે વ્યક્તિને માહિતી મેળવવાની છે તે વ્યક્તિ અથવા તેણે નીમેલ આગણકો જેની પાસેથી માહિતી મેળવવાની છે તેને પ્રત્યક્ષ (જાતે) જઈને પ્રશ્નો પૂછી જોઈતી માહિતી મેળવે તો તે રીતને પ્રત્યક્ષ તપાસની રીત કહે છે.

દા.ત. કામદારોની સ્થિતિ અંગેની માહિતી મેળવવા માટે જો સંશોધક પોતે (અથવા તેણે નીમેલા માણસો / આગણકો) કામદારો પાસે જાય, તેમને યોગ્ય પ્રશ્નો કરી માહિતી મેળવે તેણે પ્રત્યક્ષ તપાસ કહે છે.

ફાયદા :

(1) સંશોધક કે આગણક પોતે જઈને માહિતી મેળવતા હોવાથી સત્યતા અને વિશ્વસનીયતા વધુ હોય છે.

(2) સંશોધક અભ્યાસનો હેતુ સ્પષ્ટ કરી તપાસ દરમ્યાન ઉદ્‌ભવતા પ્રશ્નો કે મૂંઝવણોનો ઉકેલ લાવીને માહિતી આપનારના મનમાં વિશ્વાસ પેદા કરી શકે છે. આમ પૂર્ણ માહિતી મેળવી શકાય છે.

(3) ઘણી વખત તપાસ દરમ્યાન (અથવા પછી) અન્ય પૂરક પ્રશ્નો (અથવા વાર્તાલાપ) દ્વારા ઘણી બધી અન્ય જરૂરી માહિતી મેળવી શકાય છે. જેમાંથી અભ્યાસ વધુ વિસ્તૃત અને સારી રીતે કરી શકાય છે.

(4) કોઈક વખત કોઈક પ્રશ્નનો જવાબ આપવામાં માહિતી આપનાર સંકોચ અનુભવતો હોય તો તે પ્રશ્નને હોશિયારીપૂર્વક વધુ સ્પષ્ટ કરીને નાજુક પરિસ્થિતિમાં પણ જરૂરી માહિતી મેળવી શકે છે.

(5) તપાસનું ક્ષેત્ર નાનું હોય અને પ્રશ્નો જટિલ કે લાગણી દુભાય તેવા હોય ત્યારે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ થાય છે.

મર્યાદા :

(1) આગણકે અથવા સંશોધકે જાતે તપાસ માટે જવાનું હોવાથી વધુ સમય, શ્રમ અને નાણાં વપરાય છે.

(2) આગણકો જો કુશળ ન હોય તો તપાસ દરમ્યાન તેમના પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતની અસર માહિતી પર પડે છે અને માહિતીની વિશ્વસનીયતા ઘટે છે.

પરોક્ષ તપાસ :

આ રીતમાં જે વ્યક્તિએ માહિતી મેળવવાની છે તે (સંશોધક) જેની પાસેથી માહિતી મેળવવાની છે તેને ન પૂછતા તેના સગાસંબંધીઓ મિત્રો કે આડોશપાડોશ પાસેથી માહિતી મેળવે છે, આવી તપાસને પરોક્ષ તપાસ કહે છે. આમ આ રીતમાં ત્રાહિત વ્યક્તિ પાસેથી માહિતી મેળવવામાં આવે છે.

કોઈ જગ્યાએ ચોરી કે લૂંટનાં કિસ્સામાં પોલીસ પરોક્ષ તપાસ કરીને આરોપી સુધી પહોંચે છે. આ ઉપરાંત છોકરા કે છોકરીનાં લગ્ન નક્કી કરવાનાં હોય ત્યારે પણ છોકરો/છોકરી અથવા તેમના પરિવાર વિશે અન્ય સગા-સંબંધીને પૂછીને માહિતી મેળવાય છે. આમ આવા કિસ્સામાં પરોક્ષ તપાસ કરવામાં આવે છે.

આ પદ્ધતિમાં માહિતી આપનારની પ્રમાણિકતા, નિષ્પક્ષતા અને માહિતી અંગેની જાણકારી અગત્યનો ભાગ ભજવે છે. સાથે સાથે સંશોધકે પણ ચોક્કસ માહિતી મેળવવા માટે યોગ્ય પ્રશ્નો પૂછી કુનેહપૂર્વક જરૂરી માહિતી એકઠી કરવી જોઈએ.

ફાયદા :

(1) વિશાળ ક્ષેત્રમાંથી માહિતી મેળવવી હોય અને માહિતી ગૂંચવણ ભરેલી હોય ત્યારે આ પદ્ધતિ ઉપયોગી છે.

(2) સમય, શ્રમ, નાણાંનો બચાવ થાય છે.

(3) પ્રશ્નો પૂછવામાં કાળજી રાખવામાં આવે તો માહિતીની ચોકસાઈ જાળવી શકાય છે.

(4) અન્ય પદ્ધતિથી મેળવેલ માહિતીને ચકાસી શકાય છે.

મર્યાદાઓ :

(1) આ રીતની સફળતાનો આધાર માહિતી આપનારની તટસ્થતા, તેની પાસેની સાચી માહિતી અને સંશોધકની પ્રશ્નો પૂછવાની કાબેલિયત પર રહેલો છે.

(2) જો માહિતી આપનાર પૂર્વગ્રહ કે પક્ષપાતી વલણ દાખવે અથવા તેની પાસે પૂરતી માહિતી ન હોય તો તેની અસર માહિતીની ગુણવત્તા પર થાય છે. તપાસ સમિતિઓ, કોર્ટ વગેરે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરે છે.

આગણકો દ્વારા તપાસ :

જ્યારે વિશાળ ક્ષેત્રમાંથી સચોટ માહિતી મેળવવાની હોય ત્યારે આગણકોની નિમણૂક કરી તેમના દ્વારા માહિતી મેળવવામાં આવે છે. આ પદ્ધતિમાં સંશોધક દ્વારા એક માહિતી પત્રક (પ્રશ્નાવલી) તૈયાર કરવામાં આવે છે અને આગણકો માહિતી આપનાર વ્યક્તિઓનો વ્યક્તિગત સંપર્ક કરીને માહિતી મેળવે છે. ત્યાર બાદ સંશોધક દ્વારા બધા આગણકો પાસેથી માહિતી પત્રકો એકઠા કરતાં સમગ્ર ક્ષેત્રની માહિતી ઝડપથી મળી જાય છે.

આ પદ્ધતિમાં આગણકોની પસંદગી અને તાલીમ ખૂબ અગત્યનો ભાગ ભજવે છે. કેવા પ્રકારની માહિતી મેળવવાની છે તેની સ્પષ્ટ સમજણ, સ્થાનિક ભાષા અને રીત-રિવાજોની જાણકારી, આગણકની પ્રમાણિકતા, મળતાવડો સ્વભાવ અને કુનેહ માહિતી મેળવવામાં ઉપયોગી બને છે.

ફાયદા :

(1) આગણકો જાતે જઈ માહિતી મેળવતા હોવાથી સાચી અને પૂરી માહિતી મળે છે.

(2) કોઈ પ્રશ્ન વિશે અસ્પષ્ટતા હોય તો તેને આગણક સ્પષ્ટ કરી સાચી માહિતી મેળવી શકે છે.

(3) ભૂલ થવાનો સંભવ ઓછો રહે છે.

(4) અશિક્ષિત વ્યક્તિ પાસેથી માહિતી મેળવી શકાય છે.

(5) જો આગણકો કેળવાયેલા/અનુભવી હોય તો માહિતીની ચોકસાઈ જળવાય છે.

મર્યાદાઓ :

(1) આગણકોને વેતન આપવાનું હોવાથી ખર્ચાળ છે.

(2) જરૂરી સંખ્યામાં કુશળ આગણકો મળવા મુશ્કેલ બને છે.

(3) આગણકોએ માહિતી આપનારના સમયે અને સ્થળે જઈને માહિતી મેળવવી પડે છે. પરિણામે ઘણીવાર તપાસમાં મોડું થાય છે.

(4) આગણકની વ્યક્તિગત કુશળતાની અસર તપાસ પર થાય છે.

(5) કોઈક વખત આગણકો પોતાના અનુમાનથી માહિતી ભરી દે છે.

ટપાલ દ્વારા તપાસ :

આ પદ્ધતિમાં જેમની પાસેથી માહિતી મેળવવાની હોય તેમને એક પ્રશ્નાવલી ટપાલ દ્વારા મોકલવામાં આવે છે. જેમાં દરેક પ્રશ્નની સામે તેના જવાબ લખવા માટે ખાલી જગ્યા અથવા વિકલ્પો આપવામાં આવે છે. તેની સાથે ટૂંકમાં તપાસનો હેતુ, માહિતીની ગુપ્તતા, પ્રશ્નાવલી ભરીને મોકલવા માટેનો વિનંતી પત્ર, આ માહિતીથી સમાજને થતાં ફાયદા વગેરેની જાણકારી આપવામાં આવે છે. આ ઉપરાંત માહિતી આપનારને ભરેલી પ્રશ્નાવલી મોકલવાનો ખર્ચ ન થાય તેવી નામ, સરનામા અને ટિકિટ ચોટાડેલું કવર પણ સાથે મોકલવામાં આવે છે. ઘણી વખત પ્રશ્નાવલી ભરીને મોકલે તેના માટે પ્રશ્નાવલીનાં પૃથ્થકકરણનો અહેવાલ અથવા અન્ય ભેટ પણ આપવામાં આવે છે.

ફાયદા :

(1) સંશોધનનાં વિશાળ ક્ષેત્રમાંથી માહિતી મેળવી શકાય છે.

(2) જો માહિતી આપનારનો સહકાર મળે તો આ રીતથી વિશાળ ક્ષેત્રમાં ઝડપી અને સરળતાથી ઓછા ખર્ચે માહિતી મેળવી શકાય છે.

(3) જો પ્રશ્નાવલી સરળ અને ટૂંકી હોય ત્યારે આ રીતથી સરળતાથી માહિતી મેળવી શકાય છે.

(4) જ્યારે કોઈ માહિતી આપવાનું કાયદાકીય રીતે ફરજિયાત બનાવ્યું હોય ત્યારે પણ આ રીત વધુ ઉપયોગી નીવડે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) અશિક્ષિત લોકો આ ભરી શકતા નથી.

(2) પ્રશ્નાવલી સદંતર ભરાય જ નહિ અથવા અધૂરી ભરાય તે પણ શક્ય છે.

(3) આ રીતમાં લેખિતમાં જવાબ આપવાના હોવાથી એક પ્રકારનો ડર રહે છે જ્યારે મૌખિક માહિતી પ્રમાણમાં સરળતાથી મળે છે.

(4) આપેલ માહિતી સાચી છે કે નહિ તેની ચકાસણી કરવી મુશ્કેલ છે.

આ રીતની સફળતાનો આધાર પ્રશ્નાવલી બનાવનારના કુનેહ અને જવાબ આપનારના યોગ્ય સહકાર પર રહેલો છે.

અન્ય પદ્ધતિઓ :

ઉપરની પદ્ધતિઓની સાથે હવે વેબસાઈટ પર એક પ્રશ્નાવલી બનાવવામાં આવે છે અને તેની લીંક મોબાઈલ, મેઈલ અથવા સોશિયલ મીડિયામાં મૂકવામાં આવે છે. તેની સાથે તપાસનો હેતુ, માહિતીની ગુપ્તતા અને તપાસનો અહેવાલ આપવામાં આવશે તેવી નોંધ મૂકવામાં આવે છે. માહિતી આપનાર આ લીંક પર ક્લીક કરીને માહિતી ભરી શકે છે. ટેક્નોલોજીનાં ઉપયોગથી વિશાળક્ષેત્રમાંથી ઝડપથી અને સચોટ માહિતી મેળવી શકાય છે.

તમારા Gmail Accountનાં (ના હોય તો A/C બનાવીને પણ) Google form દ્વારા તમને ગમતા વિષય પર એક પ્રશ્નાવલી બનાવી, તેને અન્ય લોકોને મોકલી અને તે વિષય પર અન્ય લોકોનો મત જાણી શકો છો.

આ ઉપરાંત અવલોકન દ્વારા Focus Groups (કોઈ વિષયમાં જાણકાર લોકોનો સમૂહ) દ્વારા પણ માહિતી મેળવી શકાય છે.

1.4 પ્રશ્નાવલીની રીત :

ઉપરની દરેક રીતમાં જુદા-જુદા વ્યક્તિઓ પાસેથી એક સરખી અને એક જ સ્વરૂપે માહિતી મળી રહે તે માટે જે વિષયનો અભ્યાસ કરવા માંગતા હોઈએ તેને અનુરૂપ પ્રશ્નોની યાદી બનાવીને આગણકને આપવામાં આવે છે. આ પ્રશ્નોની યાદીને પ્રશ્નાવલી કહે છે. સંશોધનની સફળતાનો સમગ્ર આધાર આ પ્રશ્નાવલી પર હોય છે. આથી પ્રશ્નાવલી તૈયાર કરવા માટે જે-તે વિષયના અનુભવીની મદદ લેવામાં આવે છે. પ્રશ્નાવલી બનાવવા માટેના કોઈ ચોક્કસ નિયમો નથી પણ નીચેની બાબતોનું ધ્યાન રાખવાથી એક સારી પ્રશ્નાવલી બનાવી શકાય છે.

આદર્શ પ્રશ્નાવલીના ગુણધર્મો :

(1) પ્રશ્નો બને તેટલા ઓછા, ટૂંકા અને સ્પષ્ટ હોવા જોઈએ.

(2) શક્ય હોય ત્યાં સુધી હા અથવા ના (વિકલ્પો વાળા) પ્રશ્નો હોવા જોઈએ, વર્ણનાત્મક (Open ended) નહિ.

(3) તપાસના હેતુને અનુરૂપ પ્રશ્નો હોવા જોઈએ, બિનજરૂરી નહિ.

(4) પ્રશ્નો તાર્કિક ક્રમમાં ગોઠવેલા હોવા જોઈએ. (દા.ત. નોકરી-ધંધો કરો છો આ પ્રશ્ન પછી આવક કેટલી છે ? તેવો પ્રશ્ન પૂછવો જોઈએ.)

(5) બને ત્યાં સુધી અંગત જીવનનાં, ગણતરી કરવી પડે કે લાગણી દુભાય તેવા પ્રશ્નો ન પૂછવા જોઈએ.

(6) બહુ યાદ કરવું પડે તેવા ભૂતકાળના પ્રશ્નો ન પૂછવા જોઈએ.

(7) હકીકતના આધારિત પ્રશ્નો પૂછવા જોઈએ, માન્યતાઓના આધારિત નહિ.

(8) જ્યારે વધુ પ્રશ્નો હોય ત્યારે પ્રશ્નાવલીને બે કે તેથી વધુ ભાગમાં વહેંચવી જોઈએ.

(9) પ્રશ્નાવલી તૈયાર થયા બાદ થોડી પસંદ કરેલી વ્યક્તિઓ પાસેથી તે ભરાવી લેવી જોઈએ. આથી પ્રશ્નાવલીમાં ખામી અથવા સુધારાનો અંદાજ આવે છે. આને પાયલોટ સર્વે કહે છે અને ત્યાર બાદ સુધારાવાળી (ફાઈનલ) પ્રશ્નાવલી તપાસ હેઠળનાં સમૂહને આપવી જોઈએ.

1.5 ગૌણ માહિતીનાં પ્રાપ્તિસ્થાનો :

બીજા દ્વારા મેળવેલ માહિતીનો જ્યારે કોઈ અન્ય વ્યક્તિ અથવા સંસ્થા ઉપયોગ કરે તો તેને ગૌણ માહિતી કહે છે. આ માહિતી મેળવવાનાં મુખ્ય બે સ્રોત છે.

(i) પ્રકાશિત ઉદ્‌ગમસ્થાન

(ii) બિન પ્રકાશિત ઉદ્‌ભવસ્થાનો

પ્રકાશિત ઉદ્‌ગમસ્થાનો (Published Sources)

(1) સરકારી પ્રકાશનો : કેન્દ્ર અને રાજ્ય સરકારો દ્વારા નિયમિત સમયે વસ્તીની માહિતી, ફુગાવાની માહિતી, આરોગ્યને લગતા આંકડા, વિવિધ ઉદ્યોગોની માહિતી, જન્મમરણના આંકડા વાહનવ્યવહારના આંકડા, આયાત-નિકાસના આંકડા, આંકડાકીય બ્યુરો દ્વારા પ્રકાશિત થતાં આંકડાઓ જેવા વિવિધ પ્રકારની માહિતી નિયમિત રીતે પ્રકાશિત થતી હોય છે. જેમાંથી ગૌણ માહિતી મળી શકે છે.

(2) અર્ધ-સરકારી પ્રકાશનો : મ્યુનિસિપલ કોર્પોરેશન, નગર પાલિકા, ગ્રામ પંચાયતો દ્વારા નિયમિતપણે જાહેર વિતરણને લગતા આંકડાઓ પ્રકાશિત થાય છે.

(3) આંતરરાષ્ટ્રીય પ્રકાશન : U.N.O. (United Nations Organization), IMF (International Monetory Fund), વર્લ્ડ બેંક, W.H.O. (World Health Organization), UNESCO (United Nations Educational Scientific and Cultural Organization) વગેરે દ્વારા નિયમિત રીતે વિવિધ વિષયો સંબંધી આંકડાઓ પ્રકાશિત થાય છે.

(4) વેપારી અને વ્યવસાયી પ્રકાશનો : વિવિધ ઉદ્યોગોના મંડળો, ચેમ્બર ઑફ કૉમર્સ, બેંકો, સ્ટોક એક્ષચેંજ તથા અન્ય વ્યાપારી સંગઠનો પોતાના વ્યાપારને લગતા આંકડાઓ/માહિતી નિયમિત રીતે પ્રકાશિત કરે છે.

(5) ખાનગી સંસ્થાનાં પ્રકાશનો : ઘણી ખાનગી સંસ્થાઓ પોતાના સંશોધનને લગતા વિવિધ લેખો, માહિતી નિયમિતપણે પ્રકાશિત કરે છે જેમકે સંશોધન-અહેવાલ, વિવિધ શૈક્ષણિક, આરોગ્ય તથા અન્ય સંસ્થાએ પ્રકાશિત કરેલા પોતાના પ્રકાશનો.

(6) સામયિકો, સમાચાર પત્રો અને અન્ય સ્રોત : જુદા-જુદા સમાચાર પત્રો અને સામયિકો કે જે નિયમિત પ્રકાશિત થાય છે તેમાંથી પણ ગૌણ માહિતી મળે છે.

દા.ત. બિઝનેસ ઇન્ડિયા, ફાઇનાન્સિયલ એક્ષપ્રેસ, આર.બી.આઈ. બુલેટિન, વિવિધ કમિશનોના અહેવાલો વગેરેમાંથી ઉપયોગી માહિતી મળે છે.

બિન પ્રકાશિત ઉદ્‌ગમ સ્થાનો : ઘણી માહિતી સંસ્થા પોતાના સંદર્ભ માટે પોતાની પાસે રાખે છે. આવી માહિતી, સંશોધન કર્તા વિનંતી કરીને મેળવી શકે છે અને તેનો ઉપયોગ કરી શકે છે. દા.ત. IIM કે IIT જેવી સંસ્થાનાં ખાનગી પ્રકાશનો.

ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરતી વખતે રાખવાની તકેદારી :

ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરવાથી સમય, શ્રમ અને નાણાંનો બચાવ થાય છે પણ સાથે-સાથે તે માહિતી કયા હેતુ માટે, કયા સમયે અને કેટલા વિસ્તારમાંથી લેવામાં આવી છે તેનો ખ્યાલ રાખીને ગૌણ માહિતીનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ. બાઉલીએ કહ્યું છે કે, ''પ્રકાશિત આંકડાઓને તેમની દર્શનીય કિંમત (Face Value) પ્રમાણે કદીય ન સ્વીકારવા જોઈએ.''

(1) પ્રાથમિક સંશોધનનો હેતુ અને ગૌણ માહિતીનો હેતુ સુસંગત હોવા જોઈએ.

(2) માહિતી પર્યાપ્ત હોવી જોઈએ એટલે કે પ્રાથમિક માહિતીના હેતુ પ્રમાણેનો પ્રદેશ અને ચલો તેમાં હોવા જોઈએ.

(3) માહિતી મેળવનારની વિશ્વાસપાત્રતા, કુનેહ અને કાળજી વગેરે માહિતીની ચોકસાઈ પર અસર કરે છે. આથી તેનું પણ ધ્યાન રાખવું જોઈએ.

(4) માહિતી મેળવવામાં કયા પ્રશ્નો, કઈ પદ્ધતિઓ અને પૃથકકરણની કઈ રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે તે જાણી લેવું જરૂરી છે.

(5) માહિતી કેટલા સમય પહેલાં એકઠી કરવામાં આવી છે તે જાણવું જરૂરી છે. કારણ કે, ખૂબ જૂની માહિતીના ભલે હેતુ સમાન હોય તોપણ તે માહિતી સાચો ખ્યાલ આપતી નથી.

1.6 વર્ગીકરણ :

આપણે માહિતી એકઠી કરવાની જુદી-જુદી રીતો જોઈ. તેના દ્વારા જે માહિતી મેળવીએ છીએ તે વિસ્તૃત સ્વરૂપે હોય છે. આથી માહિતી પરથી તારણો મેળવવા માટે તેના ચલ લક્ષણના આધારે તેનું વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે. જો માહિતીને સંખ્યામાં દર્શાવી શકાતી હોય તો તેને સંખ્યાત્મક માહિતી કહે છે જ્યારે જો માહિતીને તેના ગુણધર્મ પ્રમાણે દર્શાવી શકાતી હોય તેને ગુણાત્મક માહિતી કહે છે. કોઈ વ્યક્તિ શિક્ષિત છે કે અશિક્ષિત એ ગુણાત્મક માહિતી છે જ્યારે તે વ્યક્તિ કેટલું કમાય છે તેને સંખ્યામાં દર્શાવી શકાય છે તેથી તે સંખ્યાત્મક માહિતી છે.

ગુણાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ તેના એક અથવા વધુ ગુણધર્મોને આધારે થાય છે. જ્યારે સંખ્યાત્મક માહિતીનું વર્ગીકરણ કરવા માટે તેને તેના ચલને આધારે જુદા-જુદા વર્ગોમાં વહેંચવામાં આવે છે તેને આવૃત્તિ વિતરણ કહે છે. ચલના બે પ્રકાર છે.

અસતત ચલ : જે ચલ અમુક ચોક્કસ કિંમતો ધારણ કરતો હોય (ઘણા સંજોગોમાં પૂર્ણાંક સંખ્યા જ) તેને અસતત ચલ કહે છે. દા.ત. ક્રિકેટમાં રનની સંખ્યા, વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા, મોબાઈલમાં એપની સંખ્યા વગેરે. તથા અસતત ચલ દ્વારા બનતી શ્રેણીને અસતત શ્રેણી કહે છે. 40 મોબાઈલ તપાસતા તેમા ડાઉનલોડ કરેલ એપની સંખ્યા નીચે મુજબ જોવા મળી. આને અસતત ચલનું આવૃત્તિ વિતરણ કહે છે.

એપની સંખ્યા	8	9	10	11	12
મોબાઈલની સંખ્યા	4	9	12	8	7

સતત ચલ : જો કોઈ ચલ કોઈ એક અંતરાલમાંની બધી જ કિંમતો ધારણ કરતાં હોય તો તે ચલને સતત ચલ કહે છે. દા.ત. કોઈ સ્થળનું તાપમાન, વજન વગેરે સતત ચલના ઉદાહરણ છે અને સતત ચલથી બનતી શ્રેણીને સતત શ્રેણી કહે છે.

દા.ત. કોઈ સ્થળનું તાપમાન, વજન વગેરે સતત ચલના ઉદાહરણ છે અને સતત ચલથી બનતી શ્રેણીને સતત શ્રેણી કહે છે. સતત શ્રેણીને બે ભાગમાં વહેંચી શકાય છે.

નિવારક શ્રેણી અને અનિવારક શ્રેણી

નિવારક શ્રેણી : જો કોઈ શ્રેણીમાં કોઈ પણ વર્ગની ઉપલી સીમા અને તેના પછીના વર્ગની નીચલી સીમા બંને એક જ હોય તો તેવી શ્રેણીને નિવારક શ્રેણી કહે છે.

દા.ત.

ગુણ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
વિદ્યાર્થીની સંખ્યા	5	8	14	7	6

અહીં પ્રથમ વર્ગ 0-10 છે. જેમાં 10 એ ઉપરની સીમા છે જે તેના પછીના વર્ગ 10-20ની નીચેની સીમા બને છે અને આવું દરેક વર્ગ માટે બને છે આથી આ શ્રેણીને નિવારક શ્રેણી કહે છે.

અનિવારક શ્રેણી : જ્યારે કોઈ પણ વર્ગની ઉપરની સીમા અન તેનાં પછીની વર્ગની નીચેના સીમા જુદી હોય તો તે શ્રેણીને અનિવારક શ્રેણી કહે છે.

દા.ત.

ગુણ	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49
વિદ્યાર્થીની સંખ્યા	5	8	14	7	6

અહીં પ્રથમ વર્ગ 0-9 છે અને બીજો વર્ગ 10-19 છે. આમ પ્રથમ વર્ગની ઉપરની સીમા 9 એ ત્યાર પછીના વર્ગની નીચેની સીમા 10 બનતી નથી. આથી આ શ્રેણીને અનિવારક શ્રેણી કહે છે.

1.7 સરેરાશનો અર્થ :

આપણે જોયું કે માહિતીના વર્ગીકરણ વડે વિસ્તૃત સ્વરૂપે રહેલ માહિતીને સંક્ષેપમાં દર્શાવી શકાય છે. આમ છતાં સમગ્ર માહિતીની બીજી માહિતી સાથે સરખામણી કરવી હોય કે તે માહિતીનો બીજે ગણતરીમાં ઉપયોગ કરવો હોય તો સમગ્ર માહિતીને એક પ્રતિનિધિરૂપ સંખ્યા તરીકે દર્શાવવી જરૂરી બને છે.

આમ, સમગ્ર માહિતીનું પ્રતિનિધિત્વ કરતી, માહિતીના મુખ્ય લક્ષણો ધરાવતી અને સમગ્ર માહિતીનો નિચોડ રજૂ કરતી એક એવી સંખ્યા કે જે સમગ્ર માહિતીની મધ્યવર્તી સ્થિતિ દર્શાવતી હોય તેને મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપો (Measures of central Tendency) કહે છે. તેને સરેરાશનાં માપો પણ કહે છે.

મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપોથી મુખ્યત્વે બે હેતુઓ પાર પડે છે.

1. એક જ માપથી સમગ્ર શ્રેણીનો ખ્યાલ આવી જાય છે અને તે માપનો આગળ બીજી ગણતરીમાં ઉપયોગ કરી શકાય છે. દા.ત. એક વર્ગમાં ભણતા વિદ્યાર્થીઓના સરેરાશ ગુણ 65 હોય તો તે પરથી તેમના શૈક્ષણિક સ્તરનો ખ્યાલ આવે છે.
2. તેની મદદથી સમાન એકમો વાળી સરેરાશની કિંમતોની સરખામણી કરી શકાય છે. દા.ત. ટી.વાય.બી.કોમ.ના વર્ગ-Aના વિદ્યાર્થીઓના આંકડાશાસ્ત્ર વિષયમાં સરેરાશ ગુણ 65 છે. અને વર્ગ B ના વિદ્યાર્થીઓના આંકડાશાસ્ત્ર વિષયનાં સરેરાશ ગુણ 75 છે. તો તે પરથી એમ કહી શકાય કે વર્ગ Bના વિદ્યાર્થીઓ વર્ગ Aના વિદ્યાર્થીઓ કરતાં આંકડાશાસ્ત્રમાં વધુ હોશિયાર છે.

માહિતી કેવા પ્રકારની છે અને તેની વહેંચણી કઈ રીતની છે તેને ધ્યાનમાં રાખીને સરેરાશનાં વિવિધ માપોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે સરેરાશનાં નીચેનાં માપ પ્રચલિત છે.

મધ્યક - (Mean)

મધ્યસ્થ - (Median)

બહુલક - (Mode)

ગુણોત્તર મધ્યક - (Geometric Mean)

હકારાત્મક મધ્યક - (Harmonic Mean)

આદર્શ સરેરાશનાં લક્ષણો :

1. તે માહિતીનું યોગ્ય પ્રતિનિધિત્વ કરતું હોવું જોઈએ.
2. તેની ગણતરીમાં તમામ અવલોકનોનો ઉપયોગ થવો જોઈએ.
3. તેની વ્યાખ્યા સ્પષ્ટ અને ગણતરી સરળ હોવી જોઈએ.
4. તે માપનો આગળ અભ્યાસમાં ઉપયોગ થઈ શકવો જોઈએ.
5. તે માપ સ્થિર હોવું જોઈએ.

અહીં આપણે મધ્યકનો અભ્યાસ કરીશું. મધ્યક (સમાંતર મધ્યક / સાદી સરેરાશ)એ મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં વિવિધ માપોમાં સૌથી વધુ પ્રચલિત સરેરાશ છે.

વ્યાખ્યા : જ્યારે કોઈ માહિતીનાં અવલોકનો આપેલા હોય ત્યારે તેનાં બધા જ અવલોકનોના સરવાળાને અવલોકનોની સંખ્યા વડે ભાગતા જે માપ મળે છે, તેને તે માહિતીનો મધ્યક કહે છે. અહીં દરેક પ્રાપ્તાંકને સરખો ભાર આપવામાં આવે છે.

સામાન્ય રીતે સરેરાશનાં માપોનો ઉલ્લેખ કરવામાં આવે છે ત્યારે સરેરાશ તરીકે મધ્યકનો ઉપયોગ થાય છે.

મધ્યકનો ઉપયોગ કરતાં પહેલા તેનાં ગુણો તથા મર્યાદાઓ ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ.

ગુણ : સરેરાશનાં જુદા-જુદા માપોની સરખામણીમાં મધ્યક શ્રેષ્ઠ માપ છે.

1. મધ્યક સમજવામાં અને ગણવામાં સરળ છે.
2. તેની ગણતરીમાં બધા જ પ્રાપ્તાંકોનો ઉપયોગ થાય છે.
3. બે કે બે થી વધુ સમૂહોની સરખામણી કરવામાં ઉપયોગી છે.
4. એક જ સમષ્ટિમાંથી યોગ્ય કદનાં જો એકથી વધુ નિદર્શ લેવામાં આવે તો મધ્યકની કિંમતમાં બહુ ફરક પડતો નથી. આમ મધ્યક એક સ્થિર માપ છે.
5. તેનાં પર અન્ય ગાણિતીક પ્રક્રિયા કરી શકાતી હોવાથી ઉચ્ચ અભ્યાસમાં તે ઉપયોગી છે.

મર્યાદાઓ :

1. મધ્યકની કિંમત ખૂબ મોટા અથવા ખૂબ નાના અવલોકનોથી પ્રભાવિત થાય છે.
2. મધ્યકની કિંમત કોઈક વખત અવાસ્તવિક લાગે છે.

   દા.ત. 5 કુટુંબોમાં બાળકોની સંખ્યા તપાસતા તે 1, 3, 2, 1, 2 માલૂમ પડી. હવે તેનો

   મધ્યક $\frac{1+3+2+1+2}{5} = 1.8$ થાય.

   આમ, કુટુંબમાં બાળકોની સરેરાશ સંખ્યા 1.8 છે. એમ કહેવું યોગ્ય છે ? ના, કારણ કે કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા તો 1, 2, 3 એમ પૂર્ણાંક હોય. આવે સમયે માહિતીનાં અવલોકનોનો પ્રકાર જાણી અને તે પ્રમાણે અર્થઘટન કરવું જોઈએ. આ કિસ્સામાં કુંટુંબમાં બાળકોની સરેરાશ સંખ્યા 2 થી થોડી ઓછી છે એમ કહી શકાય.
3. મધ્યકની ગણતરીમાં જો અમૂક પ્રાપ્તાંકોની કિંમત ન આપેલી હોય તો મધ્યક શોધી શકાતો નથી.

અવર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યક :

ધારોકે કોઈ માહિતીનાં n અવલોકનો $x_1, x_2, ..., x_n$ હોય તો તે માહિતીનો મધ્યક નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કહી શકાય.

મધ્યક $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$

$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ જ્યાં $i = 1, 2, ..., n$

જ્યાં $\sum$ (સિગ્મા) 'સંજ્ઞા' સરવાળો દર્શાવે છે અને અનુગ i અવલોકનનો ક્રમ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ-1 એક વર્ગના 5 વિદ્યાર્થીઓનાં આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ 74, 62, 68, 76 અને 80 હોય તો તેમનાં ગુણનો મધ્યક શોધો.

જવાબ :

$$\text{ગુણનો મધ્યક} = \frac{\text{અવલોકનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની સંખ્યા}} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{74+62+68+76+80}{5}$$

$$= \frac{360}{5} = 72 \text{ ગુણ}$$

આમ કહી શકાય કે, આ વર્ગનાં વિદ્યાર્થીઓનાં આંકડાશાસ્ત્રમાં સરેરાશ 72 ગુણ છે.

જ્યારે અવલોકનોની કિંમતો ખૂબ જ મોટી હોય ત્યારે ગણતરીની સરળતા ખાતર મધ્યકની ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ થાય છે.

ટૂંકી રીત :

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\sum d_i}{n}$

જ્યાં A = ધારેલ મધ્યક

$d_i = x_i - A$ = દરેક પ્રાપ્તાંકમાંથી ધારેલ મધ્યકનો તફાવત

n = પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા

ઉપરના ઉદાહરણને ટૂંકી રીતે ગણવા માટે આપેલી અવલોકનોની વચ્ચેનો એક અવલોકન ધારવામાં આવે છે. અહીં સૌથી નાનો અવલોકન 62 અને સૌથી મોટું અવલોકન 80 છે. આથી A = 70 ધારતાં, d

x_i	A=70 $d_i = (x_i\text{-A})$
74	4
62	−8
68	−2
76	6
80	10
	$\sum di = 10$

મધ્યક $\bar{x}$ $= A + \frac{\sum di}{n}$

$$= 70 + \frac{10}{5}$$

$$= 70 + 2$$

$$\bar{x} = 72$$

અહીં ઉપરના બન્ને સૂત્રોનાં સ્વરૂપો જુદા છે પણ બન્ને રીતે મળતા જવાબ સરખા છે. વળી Aની કોઈ પણ કિંમત ધારવાથી મધ્યકની કિંમત બદલાતી નથી.

વર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યક :

જ્યારે માહિતીમાં અવલોકનોની સંખ્યા વધારે હોય ત્યારે માહિતીને વર્ગીકૃત કરવામાં આવે છે અને આવૃત્તિ વિતરણ તૈયાર કરવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ મધ્યક શોધવામાં આવે છે.

ધારો કે, એક સમૂહનો ચલ x જુદી જુદી K કિંમતો $x_1, x_2, \ldots\ldots x_k$ ધારણ કરે અને તેની આવૃત્તિઓ અનુક્રમે $f_1, f_2, \ldots\ldots f_k$ હોય તો તેનો મધ્યક મેળવવા માટે દરેક અવલોકનને તેની અનુરૂપ આવૃત્તિ વડે ગુણી તેનો સરવાળો કરી કુલ આવૃત્તિ વડે ભાગવામાં આવે છે એટલે કે

મધ્યક $= \dfrac{f_1x_1 + f_2\ x_2 + ... + f_k\ x_k}{f_1 + f_2 + ... + f_k}$

$= \sum \dfrac{f_ix_i}{\sum f_i}$

$\overline{x}\ = \dfrac{\sum f_ix_i}{n}$ (જ્યાં $\sum f_i = n =$ કુલ આવૃત્તિ)

ઉદાહરણ - 2 એક વિસ્તારનાં 40 કુટુંબોમાં બાળકોની સંખ્યાની તપાસ કરતા નીચે મુજબની માહિતી મળી તે પરથી મધ્યક શોધો.

બાળકોની સંખ્યા (x_i)	0	1	2	3	4
કુટુંબની સંખ્યા (f_i)	5	8	13	10	4

જવાબ :

બાળકોની સંખ્યા (x_i)	કુટુંબની સંખ્યા (f_i)	(f_ix_i)
0	5	00
1	8	08
2	13	26
3	10	30
4	4	16
	$\sum fi\ = 40$	$\sum fixi\ = 80$

મધ્યક $= \overline{x} = \dfrac{\sum f_ix_i}{n} = \dfrac{80}{40} = 2$ બાળકો

આમ આ 40 કુટુંબોમાં બાળકોની સરેરાશ સંખ્યા 2 છે.

ટૂંકી રીત : અવર્ગીકૃત માહિતીની જેમ વર્ગીકૃત માહિતી માટે પણ નીચેનું ટૂંકી રીતનું સૂત્ર ઉપયોગમાં લઈ શકાય છે.

મધ્યક $= \overline{x} = A + \dfrac{\sum f_id_i}{n}$

(જ્યાં

A = ધારેલ મધ્યક

$d_i = x_i - A =$ દરેક પ્રાપ્તાંકમાંથી ધારેલ મધ્યકનો તફાવત

$\sum f_id_i = d_i$ ને તેની અનુરૂપ આવૃત્તિ વડે ગુણી તેનો સરવાળો કરતા મળતી સંખ્યા

n = કુલ અવલોકનોની સંખ્યા)

x_i	f_i	A = 2 ધારતાં $d_i = (x_i - A)$	$f_i d_i$
0	5	−2	−10
1	8	−1	−8
2	13	0	00
3	10	1	10
4	4	2	8
	$\sum f_i = 40$		$\sum f_i d_i = 0$

હવે

$$\overline{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n}$$

$$= 2 + \frac{0}{40}$$

$$\overline{x} = 2$$

નોંધ : અહીં Aની કોઈ પણ સંખ્યા ધારવાથી જવાબમાં કોઈ ફરક પડતો નથી.

ઉપરની રીતમાં $(x_i\text{-}A)$ની કિંમતોમાં કોઈ સમાન અવયવ મળે C તો $d_i = \left(\frac{x_i - A}{C}\right)$ લઈને મધ્યક નીચેનો સૂત્ર મુજબ મેળવવામાં આવે છે.

$$\overline{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n} \times C$$

ઉદાહરણ - 3 એક વેપારી 5નાં જથ્થામાં પેન વેચે છે. છેલ્લા બે મહિનામાં તેણે વેચેલ પેનની સંખ્યા નીચે મુજબ છે તે પરથી તેણે વેચેલ પેનનો મધ્યક શોધો.

વેચેલ પેનની સંખ્યા	5	10	15	20	25	30	35	40
દિવસોની સંખ્યા	2	5	8	12	14	9	6	4

જવાબ :

વેચેલ પેનની સંખ્યા (x_i)	દિવસોની સંખ્યા (f_i)	$d_i = \left(\frac{x_i - A}{C}\right)$ A = 25, c = 5	$f_i d_i$
5	2	−4	−8
10	5	−3	−15
15	8	−2	−16
20	12	−1	−12
25	14	0	00
30	9	1	09
35	6	2	12
40	4	3	12
	$\sum f_i = 60$		− 51 + 33 = − 18 = $\sum f_i d_i$

હવે મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n} \times C$

$$= 25 + \frac{-18}{60} \times 5$$

$$= 25 - 1.50$$

$\bar{x} = 23.50$ પેન

આમ, એ વેપારી દરરોજ સરેરાશ લગભગ 23 પેન વેચે છે.

નોંધ : સાદી રીતથી ઉપરનો દાખલો જાતે પ્રયત્ન કરો.

સતત આવૃત્તિ વિતરણ માટે મધ્યક :

સતત આવૃત્તિ વિતરણ માટે મધ્યક નીચેના સૂત્રથી મેળવાય છે.

$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n} \times C$ જ્યાં C = વર્ગ લંબાઈ

નિવારક શ્રેણી માટે :

ઉદાહરણ-4 : નીચેની માહિતી માટે મધ્યક શોધો.

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
આવૃત્તિ	25	70	45	25	15	10	7	3

વર્ગ	આવૃત્તિ f_i	મધ્ય કિંમત x_i	$d_i = \left(\frac{x_i - A}{C}\right)$ A = 35, C = 10	$f_i d_i$
0-10	25	5	−3	−75
10-20	70	15	−2	−140
20-30	45	25	−1	−45
30-40	25	35	0	00
40-50	15	45	1	15
50-60	10	55	2	20
60-70	7	65	3	21
70-80	3	75	4	12
	n = 200			− 260 + 68 = $\sum f_i d_i = -192$

$$\overline{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n} \times C$$
$$= 35 + \frac{-192}{200} \times 10$$
$$= 35 - 9.6$$
$$\overline{x} = 25.4$$

અનિવારક શ્રેણી માટે મધ્યક :

ઉદાહરણ - 5 નીચેની માહિતી માટે મધ્યક શોધો.

વર્ગ	15-24	25-34	35-44	45-54	55-65	65-74
આવૃત્તિ	7	10	15	9	5	4

જવાબ :

વર્ગ	આવૃત્તિ	મધ્ય કિંમત x_i	$d_i = \left(\frac{x_i - A}{C}\right)$ A = 39.5 C = 10	$f_i d_i$
15-24	7	19.5	–2	–14
25-34	10	29.5	–1	–10
35-44	15	39.5	0	00
45-54	9	49.5	1	9
55-64	5	59.5	2	10
65-74	4	69.5	3	12
	n = 50			$\sum f_i d_i = 7$

મધ્યક $\overline{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n} \times C$

$$= 39.5 + \frac{7}{50} \times 10$$
$$= 39.5 + 1.4$$
$$\overline{x} = 40.9$$

નોંધ : અહીં વર્ગલંબાઈ બે સળંગ વર્ગોની ઉપરની અથવા નીચેની સીમાનો તફાવત લેવો. દા.ત. 25-15 = 10.

અસમાન વર્ગલંબાઈવાળી શ્રેણીનો મધ્યક :

જ્યારે એક જ દાખલામાં અસમાન વર્ગલંબાઈ આપેલી હોય ત્યારે ટૂંકી રીતથી ગણતરી ઘણી વખત અઘરી બને છે અને સાદી રીત વધુ સરળ લાગે છે.

ઉદાહરણ - 6 નીચેની માહિતી માટે મધ્યક શોધો.

વર્ગ	0-10	10-30	30-60	60-110	110-130	130-140
આવૃત્તિ	6	10	20	9	7	2

જવાબ :

વર્ગ	આવૃત્તિ f_i	મધ્ય કિંમત x_i	$f_i x_i$
0-10	6	5	30
10-30	10	20	200
30-60	20	45	900
60-110	9	85	765
110-130	7	120	840
130-140	2	135	270
	54		$\sum f_i x_i = 3005$

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$

$$= \frac{3005}{54}$$
$$= 55.65$$

નોંધ : એક જ માહિતી માટે જ્યારે જુદું-જુદું વર્ગીકરણ કરવામાં આવે અને ત્યાર બાદ બંને માટે મધ્યક શોધવામાં આવે ત્યારે અવલોકનો એક જ હોવા છતાં મધ્યકની કિંમત જુદી આવે છે.

આપણે માહિતીનાં અવલોકનોને વર્ગોમાં વહેંચીએ છીએ પછી તે વર્ગની મધ્યકિંમતને આધારે મધ્યકની ગણતરી કરીએ છીએ તેથી આમ બને છે.

મિશ્ર મધ્યક : જ્યારે આપણી પાસે માહિતીના એક જ ગુણધર્મના બે કે બેથી વધુ સમૂહ હોય અને તેમનો સંયુક્ત મધ્યક શોધીએ તો તેને મિશ્ર મધ્યક (Combined Mean) કહે છે. તેને $\bar{x}_c$ વડે દર્શાવાય છે.

વ્યાખ્યા : જો m સમૂહોનાં અવલોકનોની સંખ્યા $n_1, n_2, ..., n_m$ હોય અને તેમના મધ્યકો અનુક્રમે $\bar{x}_1\ \bar{x}_2, ...\bar{x}_m$ હોય તો તેમનો મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c$ નીચેના સૂત્રથી મળે છે.

મિશ્ર મધ્યક $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + ... + n_m\bar{x}_m}{n_1 + n_2 + ... + n_m}$

હવે જો આપણી પાસે બે સમૂહો હોય તો તેમનો મિશ્ર મધ્યક

$\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$ થી મેળવાય છે.

જ્યાં n_1 = પ્રથમ શ્રેણીનાં અવલોકનોની સંખ્યા

n_2 = બીજી શ્રેણીનાં અવલોકનોની સંખ્યા

$\bar{x}_1$ = પ્રથમ શ્રેણીનો મધ્યક

$\bar{x}_2$ = બીજી શ્રેણીનો મધ્યક

ઉદાહરણ - 7 એક કૉલેજમાં T.Y.B.Com.નાં બે વર્ગો છે. વર્ગ Aમાં 120 વિદ્યાર્થીઓ છે અને તેમનાં સરેરાશ ગુણ 76 છે. જ્યારે વર્ગ Bમાં 130 વિદ્યાર્થીઓ છે અને તેમના સરેરાશ ગુણ 81 છે. તો તે પરથી કૉલેજનાં T.Y.B.Comના વિદ્યાર્થીઓનો મધ્યક શોધો.

જવાબ :

n_1 = વર્ગ Aના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા = 120

$\overline{x}_1$ = વર્ગ Aના વિદ્યાર્થીઓનાં સરેરાશ ગુણ = 76

n_1 = વર્ગ Bના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા = 130

$\overline{x}_2$ = વર્ગ Bના વિદ્યાર્થીઓનાં સરેરાશ ગુણ = 81

મિશ્ર મધ્યક $= \dfrac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{120(76)+130(81)}{120+130}$$

$$= \frac{9,120+10,530}{250}$$

$$\overline{X}_c = \frac{19650}{250}$$

મિશ્ર મધ્યક $\overline{x}_c$ = 78.6 ગુણ

આમ, આ કૉલેજનાં T.Y.B.Com.નાં વિદ્યાર્થીઓનાં સરેરાશ ગુણ 78.6 છે.

અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે ફક્ત મધ્યક માટે મિશ્ર મધ્યકની ગણતરી શક્ય છે. મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં અન્ય માપો માટે આ પ્રકારની ગણતરી થઈ શકતી નથી. એટલે કે જો બે શ્રેણીની સંખ્યા અને તેમના મધ્યસ્થ કે બહુલક આપેલા હોય ત્યારે તેના ભેગા મધ્યસ્થ કે બહુલક શોધવા માટે બંને શ્રેણીને ભેગી કરીને નવેસરથી ગણતરી કરવી પડે છે. આ મધ્યકનું એક જમા પાસું છે.

ભારિત મધ્યક :

સમાંતર મધ્યકની ગણતરીમાં બધા જ અવલોકનોને એક સરખો ભાર આપવામાં આવે છે. તેથી આપણે બધા અવલોકનોનો સરવાળો કરી તેને કુલ અવલોકનો વડે ભાગીએ છીએ.

પરંતુ વ્યવહારમાં ઘણી વખત એવું બને છે કે આપણા માટે જુદા-જુદા અવલોકનોનું મહત્ત્વ જુદું-જુદું હોય છે. આ સંજોગોમાં ભારિત મધ્યક એ વધુ યોગ્ય માપ છે.

વ્યાખ્યા : જો માહિતીનાં અવલોકનો x_1, x_2, ... x_n હોય અને તેમના ભાર અનુક્રમે w_1, w_2, ..., w_n હોય તો ભારિત મધ્યકનું સૂત્ર નીચે મુજબ અપાય છે.

$$\overline{x}_w = \frac{w_1\ x_1 + w_2\ x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots.. + w_n}$$

$$\overline{x}_w = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

જ્યાં x_i = ચલ x ની i મી કિંમત

w_i = x_i ને આપેલો ભાર

$\sum w_i x_i = x_i$ ને અનુરૂપ ભાર w_i ના ગુણાકારનો સરવાળો

$\sum w_i =$ કુલભાર

ઉદાહરણ - 8 : એક ફેક્ટરીમાં ચાર પ્રકારનાં કારીગરો જુદી-જુદી સંખ્યામાં ફીક્સ વેતનથી કામ કરે છે.

કારીગરોનો પ્રકાર	**કારીગરોની સંખ્યા**	**કારીગરોનો પગાર**
A	20	700
B	30	900
C	35	1100
D	45	1400

તો તે પરથી વેતનનો ભારિત મધ્યક શોધો.

જવાબ :

અહીં કારીગરોનાં પ્રકાર પ્રમાણે તેમની સંખ્યાને ભાર તરીકે લેતાં.

કારીગરોનો પગાર (x_i)	કારીગરોની સંખ્યા (w_i)	$x_i w_i$
700	20	14,000
900	30	27,000
1100	35	38,500
1400	45	63,000
	130	1,42,500

ભારિત મધ્યક $= \dfrac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$

$$= \frac{1,42,500}{130}$$

ભારિત મધ્યક $= 1096.15$

1.8 પ્રસારમાન :

માહિતીને યોગ્ય રીતે સમજવા માટે આપણે માહિતીને કોષ્ટક તથા આવૃત્તિ વિતરણ દ્વારા દર્શાવીએ છીએ. આગળ આપણે માહિતીની મધ્યકિંમત શોધવા માટે સરેરાશનો અભ્યાસ કર્યો. પરંતુ તેની સાથે માહિતીનાં અવલોકનોમાં કેટલો પ્રસાર છે તે જાણવું પણ એટલું જ જરૂરી બને છે. આ માટે આપણે પ્રસારમાનનો અભ્યાસ કરીશું.

આંકડાશાસ્ત્રમાં માહિતીનાં અવલોકનો તેની મધ્યકિંમતથી સરેરાશ રીતે કેટલે દૂર સુધી ફેલાયેલા (પ્રસરેલા) છે તે દર્શાવતા માપને પ્રસારમાનનું માપ કહે છે.

દા.ત. ભારતીય ક્રિકેટ ટીમનાં બે ખેલાડીઓ વિરેન્દ્ર સહેવાગ અને રાહુલ દ્રવિડના 4 મેચોના રન નીચે મુજબ છે. હવે ફાઈનલ મેચ રમવાની છે અને તેમાં આ બેમાંથી માત્ર એક જ ખેલાડીને પસંદ કરવનો છે. ફાઈનલ મેચ હોવાથી સારી શરૂઆત થાય અને વિકેટ ટકાવી રાખે તેવા ખેલાડીની જરૂર છે. તો બન્ને માંથી કયા ખેલાડીને પસંદ કરીશું ?

વિરેન્દ્ર સહેવાગ	15	60	90	71
રાહુલ દ્રવિડ	55	56	60	65

અહીં બંને ખેલાડીઓએ કરેલ રનની સરેરાશ લઈએ તો 59 થાય છે. પરંતુ વિરેન્દ્ર સહેવાગે સૌથી વધુ 90 જ્યારે સૌથી ઓછા 15 રન કરે છે. આમ તેનો પ્રસાર (90-15) = 75 છે. જ્યારે રાહુલ દ્રવિડના કિસ્સામાં તેનો પ્રસાર (65-55) = 10 રનનો છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તેનો રાહુલ દ્રવિડના કિસ્સામાં તે ઓછામાં ઓછા 55 રન દર વખતે કરે છે જ્યારે વિરેન્દ્ર સહેવાગ કોઈક વખત 15 રનમાં પણ આઉટ થઈ શકે છે. જે ખેલાડીનો પ્રસાર ઓછો તે ખેલાડી વધુ સ્થિર કહેવાય. આમ આ માહિતી પરથી (સ્થિર) બેસ્ટમેન તરીકે રાહુલ દ્રવિડની પસંદગી કરવી જોઈએ.

આમ, બંને ખેલાડીઓની સરેરાશ સમાન હોવા છતાં ફક્ત સરેરાશનો ઉપયોગ કરીને સાચો નિર્ણય લઈ શકાતો નથી. આથી માહિતીની સરેરાશની સાથે તેનો પ્રસાર જાણવો પણ એટલો જ જરૂરી બને છે. માહિતીનાં અવલોકનો તેની સરેરાશથી કેટલા દૂર સુધી વિસ્તરેલા છે તેના સંખ્યાત્મક માપને પ્રસારમાન કહે છે. બીજા શબ્દોમાં માહિતીનાં અવલોકનોનાં સરખાપણાની ખામીને પ્રસાર કહે છે.

નિરપેક્ષ પ્રસાર અને સાપેક્ષ પ્રસાર :

નિરપેક્ષ પ્રસાર એટલે એવું માપ કે જેની સાથે ગણતરીનો એકમ સંકળાયેલો હોય. દા.ત. અકસ્માતની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન 1.21 અકસ્માત અથવા ઊંચાઈનું પ્રમાણિત વિચલન 3.25 ઈંચ વગેરે. જ્યારે બે શ્રેણીઓનાં એકમો જુદા હોય ત્યારે તેમની સરખામણી શક્ય બનતી નથી. આ માટે સાપેક્ષ પ્રસારનો ઉપયોગ થાય છે. સાપેક્ષ પ્રસાર એ એકમ રહિત માપ છે અને નિરપેક્ષ પ્રસારનાં માપને તેનાં સરેરાશનાં માપ વડે ભાગવાથી સાપેક્ષ પ્રસારનું માપ મળે છે.

આમ,

$$\text{સાપેક્ષ પ્રસાર} = \frac{\text{નિરપેક્ષ પ્રસાર}}{\text{સરેરાશ}}$$

પ્રસારનાં જુદા જુદા નિરપેક્ષ માપ અને સાપેક્ષ માપ નીચે પ્રમાણે છે.

નિરપેક્ષ પ્રસાર	સાપેક્ષ પ્રસાર (પ્રસારાંક)
વિસ્તાર	વિસ્તાર આંક
ચતુર્થક વિચલન	ચતુર્થક વિચલનાંક
સરેરાશ વિચલન	સરેરાશ વિચલનાંક
પ્રમાણિત વિચલન	પ્રમાણિત વિચલનાંક

પ્રસારમાનનાં જુદા-જુદા માપોમાંથી આપણે ફક્ત પ્રમાણિત વિચલનનો અભ્યાસ કરીશું.

પ્રમાણિત વિચલન :

માહિતીનાં દરેક અવલોકનમાંથી તેનાં મધ્યકને બાદ કરી મળતી કિંમતના વર્ગોનો સરવાળો કરી તેને કુલ સંખ્યા વડે ભાગતા મળતા માપને વિચરણ કહે છે. તેને S^2 વડે દર્શાવાય છે. વિચરણના ધન વર્ગમૂળને પ્રમાણિત વિચલન કહે છે તેને S વડે દર્શાવાય છે. માહિતીનાં પ્રમાણિત વિચલનને તેનાં મધ્યક વડે ભાગતાં મળતાં સાપેક્ષ માપને પ્રમાણિત વિચલનાંક કહે છે.

એક માહિતીનાં n અવલોકનો $x_1, x_2, ... x_n$ હોય અને તેનો મધ્યક $\overline{x}$ હોય તો તે માહિતીનું વિચરણ નીચેના સૂત્રથી અપાય છે.

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

વિચરણનું ઘન વર્ગમૂળ લેવાથી પ્રમાણિત વિચલન મળે છે.

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

ગુણ-દોષ :

પ્રસારમાનનાં બધા માપોમાં પ્રમાણિત વિચલનને આદર્શ માપ ગણવામાં આવે છે અને તેથી જ ઘણા બધા સંશોધનોમાં આ માપનો બહોળો ઉપયોગ થાય છે.

ગુણ :

(1) તેની ગણતરીમાં દરેક પ્રાપ્તાંકનો ઉપયોગ થાય છે.

(2) તેની વ્યાખ્યા સ્પષ્ટ છે.

(3) તેની ચોક્કસ કિંમત મળે છે.

(4) તેનાં પર નિદર્શના વધ-ઘટની ખાસ અસર થતી નથી.

(5) અન્ય આંકડાશાસ્ત્રીય ગણતરીમાં તેનો ઉપયોગ થઈ શકે છે.

દોષ :

(1) પ્રસારમાનનાં અન્ય માપોની સરખામણીમાં પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી અઘરી છે.

(2) પ્રમાણિત વિચલન શોધવામાં તફાવતનો વર્ગ કરવામાં અંતના પ્રાપ્તાંકોને વધારે મહત્વ આપવામાં આવે છે.

અવર્ગીકૃત માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન.

ઉદાહરણ - 9 : નીચે આપેલા પ્રાપ્તાંકો માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

26, 28, 24, 25, 36, 32, 38, 40, 15, 36

x_i	$\bar{x} = 30$ $(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
26	−4	16
28	−2	04
24	−6	36
25	−5	25
36	6	36
32	2	04
38	8	64
40	10	100
15	−15	225
36	6	36
$\sum x_i = 300$	$\sum(x_i - \bar{x}) = 0$	$\sum(x_i - x)^2 = 546$

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{300}{10} = 30$

પ્રમાણિત વિચલન $S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$

$$= \sqrt{\frac{546}{10}}$$
$$= \sqrt{54.6}$$
$$S = 7.389$$

ઉપરના ઉદાહરણમાં મધ્યક પૂર્ણાંક હોવાથી સાદી રીતનો ઉપયોગ કર્યો. પરંતુ જ્યારે મધ્યક અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે ટૂંકી રીતનું સૂત્ર સરળ પડે છે. આ સૂત્ર નીચે મુજબ અપાય છે.

$$S = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum di}{n}\right)^2}$$

જ્યાં $di = x_i - A$ = દરેક અવલોકનનો ધારેલ મધ્યકમાંથી લીધેલ તફાવત

A = ધારેલો મધ્યક

n = અવલોકનોની સંખ્યા

ઉદાહરણ-10 નીચેની માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

25, 28, 27, 37, 33, 32, 26, 30

જવાબ :

x_i	A=30 $d_i = (x_i\text{-}A)$	$di^2 = (x_i\text{-}A)^2$
25	–5	25
28	–2	04
27	–3	09
37	7	49
33	3	09
32	2	04
26	–4	16
30	0	00
238	$\sum d_i = -14+12 = -2$	116

મધ્યક $\bar{x} = A + \frac{\sum d_i}{n}$

$$= 30 + \frac{(-2)}{8}$$
$$= 30 - 0.25$$
$$\overline{x} = 29.75$$

(અહીં મધ્યક અપૂર્ણાંક હોવાથી A = 30 ધારી ગણતરી કરતાં)

નોંધ : (1) અહીં ધારેલ મધ્યક Aની કિંમત સાચા મધ્યકથી વધુ હોવાથી $\sum d_i = \sum(x_i - A)$ની કિંમત ઋણ આવશે. જો ધારેલ મધ્યક Aની કિંમત સાચા મધ્યકથી નાની હોય તો $\sum d_i = \sum(x_i - A)$ની કિંમત ધન આવે.

(2) મધ્યક શોધ્યા વિના પણ A ની કોઈ પણ કિંમત ધારીને ગણતરી કરી શકાય છે.

પ્રમાણિત વિચલન $S = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum d_i}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{116}{8} - \left(\frac{-2}{8}\right)^2}$$

$$= \sqrt{14.5 - 0.0625}$$

$$S = 3.7997$$

વર્ગીકૃત માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન :

અસતત આવૃત્તિ વિતરણ માટે :

એક અસતત આવૃત્તિ વિતરણનાં ચલ xના k અવલોકનો $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$ હોય અને તેને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_k$ હોય તો પ્રમાણિત વિચલન નીચેના સૂત્રથી મેળવાય છે.

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$
$$= \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{n}\right)^2}$$

જ્યાં

f_i = ચલ x_iની આવૃત્તિ (i = 1, 2.....,k)

$\sum f_i = n$ કુલ આવૃત્તિ

$(x_i - \overline{x}) =$ કિંમત x_iનો મધ્યક $\overline{x}$ માંથી તફાવત

ટૂંકી રીત :

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2}$$

જ્યાં f_i = ચલ x_i ની આવૃત્તિ (i = 1, 2,......k)

$d_i = x_i - A$ = દરેક અવલોકનનો ધારેલ મધ્યક Aમાંથી લીધેલ તફાવત

$\sum f_i = n =$ કુલ આવૃત્તિ

ઉદાહરણ - 11 એક વિસ્તારમાં 30 દિવસમાં થતા અકસ્માતનું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ મળે છે. તે પરથી અકસ્માતની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

અકસ્માતની સંખ્યા	0	1	2	3	4
દિવસોની સંખ્યા	4	6	10	6	4

અકસ્માતની સંખ્યા (x_i)	દિવસોની સંખ્યા (f_i)	$f_i x_i$	$\bar{x} = 2$ $(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i\ (x_i - \bar{x})^2$
0	4	00	–2	4	16
1	6	06	–1	1	06
2	10	20	0	0	00
3	6	18	1	1	06
4	4	16	2	4	16
	30	$\sum f_i x_i = 60$			$\sum fi(x_i - \bar{x})^2 = 44$

મધ્યક $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{60}{30} = 2$

અહીં મધ્યક પૂર્ણાંક હોવાથી નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i\ (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{44}{30}}$$

$$= \sqrt{1.4666}$$

S = 1.21 અકસ્માત

ઉદાહરણ-12 100 વિદ્યાર્થીઓનાં મોબાઈલમાં તેઓએ કેટલી એપ્લિકેશન ડાઉનલોડ કરી છે તે નોંધતા નીચે મુજબનું આવૃત્તિ વિતરણ મળ્યું. તે પરથી ડાઉનલોડ કરેલ એપ્લિકેશનની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

ડાઉનલોડ એપની સંખ્યા x_i	8	9	10	11	12	13	14
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા f_i	5	8	18	30	21	14	4

જવાબ : A = 11 ધારીને ગણતરી કરતાં

ડાઉનલોડ એપની સંખ્યા (x_i)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	A = 11 $d_i = (x_i - A)$	$d_i^2 = (x_i - A)^2$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
8	5	–3	9	–15	45
9	8	–2	4	–16	32
10	18	–1	1	–18	18
11	30	0	0	00	00
12	21	1	1	21	21
13	14	2	4	28	56
14	4	3	9	12	36
	$\sum f_i = 100$			$\sum f_i d_i = 12$	$\sum f_i d_i = 2082$

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{208}{100} - \left(\frac{12}{100}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2.08 - 0.0144}$$

S = 2.0656 ડાઉનલોડ

જ્યારે માહિતી સતત આવૃત્તિ વિતરણ ધરાવતી હોય અને એક સમાન વર્ગલંબાઈવાળા વર્ગોમાં વહેંચાયેલી હોય ત્યારે ઉપરના અસતત આવૃત્તિ વિતરણ માટેના સૂત્રને વર્ગલંબાઈ C વડે ગુણવામાં આવે છે, $d_i = \frac{x_i - A}{C}$

ઉદાહરણ - 13 નીચેના આવૃત્તિ વિતરણ માટે પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરો.

ગુણ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
આવૃત્તિ	5	7	18	30	18	8	8	6

જવાબ :

ગુણ (x_i)	આવૃત્તિ (f_i)	મધ્યકિંમત x_i	જ્યાં A = 35, C=10 $d_i = \frac{x_i - A}{C}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
0-10	5	5	–3	–15	45
10-20	7	15	–2	–14	28
20-30	18	25	–1	–18	18
30-40	30	35	0	00	00
40-50	18	45	1	18	18
50-60	8	55	2	16	32
60-70	8	65	3	24	72
70-80	6	75	4	24	96
	n = 100			$\sum f_i d_i$ = - 47+82 = 35	$\sum f_i d_i^2$ = 309

મધ્યક $\overline{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n} \times C$

$$= 35 + \frac{35}{100} \times 10$$
$$= 35 + 3.5$$
$$\overline{x} = 38.5$$

પ્રમાણિત વિચલન $S = \sqrt{\frac{\sum f_i {d_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2} \times C$

$$= \sqrt{\frac{309}{100} - \left(\frac{35}{100}\right)^2} \times 10$$
$$= \sqrt{3.09 - (0.1225)} \times 10$$
$$= \sqrt{2.9675} \times 10$$
$$S = 17.226 \text{ ગુણ}$$

અહીં માહિતી સતત વર્ગલંબાઈવાળા સમાન વર્ગોમાં વહેંચાયેલી હોવાથી સૌ પ્રથમ દરેક વર્ગની મધ્ય કિંમત લઈ વર્ગોને પ્રતિનિધિરૂપ કિંમતોમાં ફેરવવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ તે કિંમતોમાંથી ધારેલ મધ્યક A બાદ કરતાં આપણને d_iની કિંમત મળે છે. (આમ $d_i = x_i - A$) અહીં Aની ગમે તે કિંમત ધારવાથી જવાબમાં ફરક પડતો નથી. પરંતુ સામાન્ય રીતે લગભગ વચ્ચેની કિંમત ધારવાથી ગણતરી સરળ બને છે.

મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન : જેમ આપણે બે કે વધુ સમૂહોઓનાં મધ્યક પરથી મિશ્ર મધ્યક શોધ્યો હતો તે જ રીતે બે કે બેથી વધુ સમૂહોનાં પ્રમાણિત વિચલન આપેલા હોય તેના પરથી મેળવેલ તેમના સંયુક્ત પ્રમાણિત વિચલનને મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન કહે છે.

ધારો કે પ્રથમ સમૂહમાં n_1 અવલોકનો છે તેનો મધ્યક $\overline{x}_1$ અને પ્રમાણિત વિચલન S_1 છે જ્યારે બીજા સમૂહમાં n_2 અવલોકનો છે તેમનો મધ્યક $\overline{x}_2$ અને પ્રમાણિત વિચલન S_2 છે. તે બંને સમૂહોને ભેગા કરી મળતા નવા સમૂહનાં મધ્યક ને $\overline{x}_c$ અને પ્રમાણિત વિચલનને S_c વડે દર્શાવીએ તો $\overline{x}_c$ ને મિશ્ર મધ્યક અને S_c ને મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન કહે છે. તેને નીચેના સૂત્રથી દર્શાવાય છે.

મિશ્ર મધ્યક $\overline{x}_c = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2}$

મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન $S_c = \sqrt{\frac{n_1\left(S_1^2 + d_1^2\right) + n_2\left(S_2^2 + d_2^2\right)}{n_1 + n_2}}$

જ્યાં $d_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}_c =$ પ્રથમ સમૂહનો મધ્યક - મિશ્ર મધ્યક

$d_2 = \overline{x}_2 - \overline{x}_c =$ બીજા સમૂહનો મધ્યક - મિશ્ર મધ્યક.

આમ મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધતા પહેલા મિશ્ર મધ્યક શોધવો પડે છે.

ઉદાહરણ-14 જો $n_1 = 200$ $n_2 = 200$

$S_1 = 8$ $S_2 = 6$

$\overline{x}_1 = 50$ $\overline{x}_2 = 70$ હોય તો

બંન્ને સમૂહોનું મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

જવાબ : મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધવામાં મિશ્ર મધ્યકનો ઉપયોગ થતો હોવાથી આપણે સૌ પ્રથમ મિશ્ર મધ્યક શોધીશું.

મિશ્ર મધ્યક $$\overline{x}_c = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{200(50) + 200(70)}{200 + 200}$$

$$= \frac{10,000 + 14000}{400}$$

$$= \frac{24000}{400}$$

$$\overline{x}_c = 60$$

મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન $$= \sqrt{\frac{n_1\left(s_1^2 + d_1^2\right) + n_2\left(s_2^2 + d_2^2\right)}{n_1 + n_2}}$$

હવે $d_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}_c = 50 - 60 = -10$ અને $d_1^2 = 100$

$d_2 = \overline{x}_2 - \overline{x}_c = 70 - 60 = 10$ અને $d_2^2 = 100$

$$S_c = \sqrt{\frac{200(64+100) + 200(36+100)}{200+200}}$$

$$= \sqrt{\frac{32,800 + 27,200}{400}}$$

$$= \sqrt{\frac{6000}{400}}$$

મિશ્ર પ્ર.વિ. $= 12.24$

ચલનાંક :

જ્યારે બે કે બે થી વધુ સમૂહની સરખામણી કરવી હોય તો પ્રસારમાનનાં સાપેક્ષ માપ પ્રમાણિત વિચલનાંકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. પરંતુ કાર્લ પિયર્સન દ્વારા અપાયેલું ચલનાંકનું માપ બે શ્રેણીની સરખામણી વધુ યોગ્ય રીતે કરે છે. આથીજ બે કે વધુ શ્રેણીનાં પ્રસારની સરખામણી કરવા માટે ચલનાંકનો ઉપયોગ થાય છે.

$$ચલનાંક = \frac{પ્રમાણિત\ વિચલન}{મધ્યક} \times 100$$

$$= \frac{S}{\bar{x}} \times 100$$

જે સમૂહમાં ચલનાંક ઓછો હોય તે સમૂહની કિંમતો વધુ સ્થિર છે જ્યારે જે સમૂહમાં ચલનાંક વધુ હોય તે શ્રેણીની કિંમતો પ્રમાણમાં વધુ દૂર સુધી પ્રસરેલી છે એમ કહેવાય.

વિશિષ્ટ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ-15 નીચેની માહિતી માટે જો મધ્યક 35.6 હોય તો આવૃત્તિની ખૂટતી કિંમત શોધો.

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
આવૃત્તિ	4	6	8	12	?	5	5

જવાબ :

વર્ગ	આવૃત્તિ f_i	મધ્યકિંમત x_i	A = 45, C = 10 $d_i \frac{x_i - A}{C}$	$f_i d_i$
0-10	4	5	–4	–16
10-20	6	15	–3	–18
20-30	8	25	–2	–16
30-40	12	35	–1	–12
40-50	f	45	0	00
50-60	5	55	1	05
60-70	5	65	2	10
				–62 + 15 = $f_i d_i$ = – 47

અહીં જે વર્ગની સામેની આવૃત્તિ શોધવાની હોય તેની મધ્ય કિંમતને A ધારતાં

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{n} \times C$$

$$35.6 = 45 + \frac{-47}{n} \times 10$$

$$35.6 - 45 = \frac{-470}{n}$$

$$-9.4 = \frac{-470}{n}$$

$$\therefore n = \frac{470}{9.4} = 50$$

આમ, $\sum fi = n = 50$ થાય.

માટે 4 + 6 + 8 + 12 + f + 5 + 5 = 50

f+40 = 50

$\therefore f = 10$ થાય

આમ ખૂટતી આવૃત્તિ 10 થાય.

ઉદાહરણ - 16 જો એક શ્રેણી માટે મધ્યક 110 અને પ્રમાણિત વિચલન 43.56 હોય તો પ્રમાણિત વિચલનાંક અને ચલનાંક શોધો.

જવાબ :

$$\text{પ્રમાણિત વિચલનાંક} = \frac{\text{પ્રમાણિત વિચલન}}{\text{મધ્યક}}$$
$$= \frac{43.56}{110}$$
$$= 0.396$$

જ્યારે,

$$\text{ચલનાંક} = \frac{\text{પ્રમાણિત વિચલન}}{\text{મધ્યક}} \times 100$$
$$= \frac{43.56}{110} \times 100$$
$$= 39.6$$

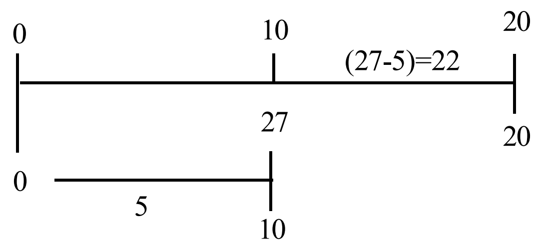
ઉદાહરણ - 17 નીચેની માહિતી પરથી મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વર્ગ	0-10	0-20	0-30	0-40	0-50	0-60
પ્રવૃત્તિ	5	27	44	59	66	100

અહીં વર્ગોની વર્ગલંબાઈ જુદી-જુદી છે વળી દરેક વર્ગની નીચેની સીમા શૂન્ય છે જ્યારે ઉપરની સીમા બદલાય છે. વળી પ્રથમ વર્ગની સીમા 0-60 આપેલી છે. આમ માહિતી સંચયી આવૃત્તિ વિતરણ સ્વરૂપે આવેલી છે તેને (સમાન) વર્ગલંબાઈનાં સ્વરૂપમાં ફેરવીને ત્યાર બાદ ગણતરી કરવી પડે.

નવો વર્ગ	**આવૃત્તિ**	**મધ્યકિંમત**	$d_i = \frac{x_i - A}{c}$ $A = 35, c = 10$	$f_i d_i$	fid_i^2
0-10	5	5	-3	-15	45
10-20	22	15	-2	-44	88
20-30	17	25	-1	-17	17
30-40	15	35	0	00	00
40-50	7	45	1	07	07
50-60	34	55	2	68	136
	$\sum fi = 100$			-76 + 75 $\sum f_i d_i = -1$	293 $= f_i d_i^2$

અહીં વર્ગ (0-10)ની આવૃત્તિ 5 છે જ્યારે વર્ગ (0-20)ની આવૃત્તિ 2 છે. તેને વર્ગ (0-10) અને વર્ગ (10-20)માં નીચે મુજબ ફેરવી શકાય. (0-20)નો વર્ગમાંથી (0-10)નો વર્ગ બાદ કરતાં (10-20) વર્ગની આવૃત્તિ મળે.



મધ્યક $\overline{x} = A + \frac{\sum fidi}{n} \times C$

$$= 35 + \frac{-1}{100} \times 10$$
$$= 35 - 0.1$$

મધ્યક $\overline{x} = 34.9$

પ્રમાણિત વિચલન $S = \sqrt{\frac{\sum fidi^2}{n} - \left(\frac{\sum fidi}{n}\right)^2} \times C$

$$= \sqrt{\left(\frac{293}{100} - \left(\frac{-1}{100}\right)^2\right)} \times 10$$
$$= \sqrt{2.93 - 0.0001} \times 10$$
$$= 1.7117 \times 10$$
$$S = 17.117$$

ઉદાહરણ - 18 : નીચેની માહિતી પરથી મધ્યક શોધો.

ચલ	0	1	2	3	4-6	6-10	10-14	14-20	20-30
આવૃત્તિ	15	25	30	26	30	52	39	24	9

જવાબ : અહીં અસતત અને સતત શ્રેણી ભેગી આપેલ હોવાથી આપણે મધ્યકનાં સાદા સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

ચલ	આવૃત્તિ (fi)	મધ્યકિંમત x_i	$f_i x_i$
0	15	0	00
1	25	1	15
2	30	2	60
3	26	3	78
4-6	30	5	150
6-10	52	8	416
10-14	39	12	468
14-20	24	17	408
20-30	9	25	225
	250		1830

હવે મધ્યક $\overline{x} = \frac{\sum fixi}{n}$

$$= \frac{1830}{250}$$

મધ્યક $\overline{x} = 7.32$

સ્વાધ્યાય

1. મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપ કોને કહે છે સમજાવો તથા તેનાં જુદા-જુદા માપો જણાવો.
2. આદર્શ સરેરાશનાં લક્ષણો જણાવો.
3. સરેરાશનાં માપોમાં આદર્શ માપ કોને કહે છે ? શા માટે ?
4. મધ્યકની વ્યાખ્યા આપી તેના ગુણ-દોષ જણાવો.
5. મિશ્ર મધ્યકની વ્યાખ્યા આપી સમજાવો.
6. ભારિત મધ્યક સમજાવો.
7. મિશ્ર મધ્યક ભારિત મધ્યકથી કઈ રીતે જુદો પડે છે.
8. પ્રસારનો અર્થ સમજાવી તેના જુદા-જુદા માપો જણાવો.
9. નિરપેક્ષ પ્રસાર અને સાપેક્ષ પ્રસાર સમજાવો.
10. પ્રમાણિત વિચલનની વ્યાખ્યા આપી તેના ગુણધર્મો જણાવો.
11. મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલનની વ્યાખ્યા આપો.

ટૂંકા દાખલા

12. એક સમૂહનાં બધા જ અવલોકનો 40 હોય તો તેનો મધ્યક કેટલો થાય. (40)
13. 25 અવલોકનોનો સરવાળો 287.5 હોય તો તેનો મધ્યક શોધો. (11.5)
14. 10 અવલોકનોનો મધ્યક 20 હોય અને એક સંખ્યા ભૂલથી 15ને બદલે 25 લેવાઈ ગઈ હોય તો તેનો સાચો મધ્યક શોધો. (19)
15. એક શ્રેણીનાં 22 અવલોકનોનો મધ્યક 27 છે. હવે જો દરેક અવલોકનમાં 3 ઉમેરવામાં આવે તો નવો મધ્યક કેટલો થાય. (30)
16. જો 10 અવલોકનોનો મધ્યક 30 અને 20 અવલોકનોનો મધ્યક 35 હોય તો તેનો મિશ્ર મધ્યક શોધો. (33.33)

17. એક સમૂહનાં 8 અવલોકનો 48, 50, 54, 45, 47, 55, 58, 54 હોય તો તે સમૂહનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.(મધ્યક 51.375 પ્રમાણિત વિચલન 4.24)

18. નીચેની માહિતી માટે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

x_p	0	1	2	3	4	5
f_i	5	8	18	16	10	3

(મધ્યક 2.45 પ્રમાણિત વિચલન 1.28)

19. નીચેની માહિતી માટે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

xi	10	20	30	40	50
fi	43	75	67	72	63

(મધ્યક-31.16 પ્રમાણિત વિચલન-3.31)

20. નીચેની માહિતી માટે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
આવૃત્તિ	4	8	10	24	32	16	8

(મધ્યક 39.90 પ્રમાણિત વિચલન 1.47)

21. નીચેની માહિતી પરથી મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

વર્ગ	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
આવૃત્તિ	5	10	20	40	35	8	2

(મધ્યક 34.67 પ્રમાણિત વિચલન 12.58)

22. નીચેની માહિતી પરથી મધ્યક શોધો.

વર્ગ	0-99	100-199	200-299	300-399	400-499	500-599	600-699
આવૃત્તિ	10	15	30	20	15	8	2

(મધ્યક 292.5 પ્રમાણિત વિચલન 145.78)

23. નીચેની માહિતી માટે ભારિત મધ્યક શોધો.

xi	20	60	80	120	160
wi	4	2	5	4	5

(ભારિત મધ્યક 94)

24. જો $n_1 = 30$, $n_2 = 30$, અને $\overline{x}_1 = 60$ અને $\overline{x}_2 = 40$ હોય તો બે સમૂહનો મિશ્ર મધ્યક શોધો.

(મિશ્ર મધ્યક 50)

25. જો n = 225, $\overline{x} = 25.4, \sum(x_i - \overline{x})^2 = 441$ હોય તો આ સમૂહનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો. (પ્રમાણિત વિચલન 1.4)

26. નીચેની માહિતી પરથી બે સમૂહોનું મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

$n_1 = 30$ $n_2 = 25$

$\bar{x}_1 = 85.3$ $\bar{x}_2 = 98.5$

$S_1 = 2.8$ $S_2 = 3.2$

(મિશ્ર મધ્યક 91.13, મિશ્ર પ્રમાણિત વિચલન 7.22)

27. જો શ્રેણીનો મધ્યક 20.4 અને પ્રમાણિત વિચલન 5.1 હોય તો ચલનાંક શોધો.

(ચલનાંક 25)

28. નીચે આપેલ માહિતી પરથી કઈ કંપનીનાં શેરનાં ભાવ વધુ સ્થિર છે તે નક્કી કરો.

	કંપની A	કંપની B
મધ્યક	1000 રૂ.	1050 રૂ.
પ્ર.વિ.	50 રૂ.	42 રૂ.

(કંપની A માટે ચલનાંક 5, કંપની B માટે ચલનાંક 4, કંપની Bના શેરનો ભાવ વધુ સ્થિર છે.)

MCQ (માહિતી એકત્રીકરણ અને પ્રાપ્તિ સ્થાનો)

1. નીચેનામાંથી કઈ પ્રાથમિક માહિતી નથી ?

(i) પ્રત્યક્ષ તપાસ દ્વારા મળતી માહિતી (ii) પરોક્ષ તપાસ દ્વારા મળતી માહિતી

(iii) સરકારી પ્રકાશનો દ્વારા મળતી માહિતી (iv) ખબરપત્રી દ્વારા મળતી માહિતી

2. નીચેનામાંથી કઈ ગૌણ માહિતી નથી ?

(i) ખાનગી સંસ્થાનાં પ્રકાશનો દ્વારા મળતી માહિતી

(ii) સમાચારપત્રો દ્વારા મળતી માહિતી

(iii) બિન પ્રચલિત ઉદ્‌ગમ સ્થાનો દ્વારા મળતી માહિતી

(iv) રૂપાલ દ્વારા તપાસથી મળતી માહિતી

3. નીચેનામાંથી કયું અસતત ચલનું ઉદાહરણ છે ?

(i) કોઈ સ્થળનું તાપમાન (ii) ઊંચાઈ (iii) વજન (iv) ક્રિકેટમાં રનની સંખ્યા

4. નીચેનામાંથી કયું સતત ચલનું ઉદાહરણ છે ?

(i) મોબાઈલમાં એપની સંખ્યા (ii) વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા

(iii) કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા

(iv) શરીરમાં લોહીના પરિભ્રમણની માત્રા (બ્લડ પ્રેશર)

5. સામાન્ય રીતે સરેરાશના કયા માપનો ઉપયોગ થાય છે ?

(i) મધ્યક (ii) મધ્યસ્થ (iii) બહુલક (iv) ગુણોત્તર મધ્યક

6. એક શ્રેણીના 15 અવલોકનોનો સરવાળો 330 હોય તો તેનો મધ્યક ?

(i) 20 (ii) 25 (iii) 22 (iv) 24

7. એક શ્રેણી માટે મધ્યક 27 છે. જો તેના દરેક અવલોકનમાં 3 ઉમેરવામાં આવે તો તેનો મધ્યક ?

(i) 24 (ii) 27 (iii) 30 (iv) 26

8. એક શ્રેણીના બધા જ અવલોકનો 18 હોય તો તેનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન ?

(i) 18, 18 (ii) 0, 18 (iii) 18, 0 (iv) 0, 0

9. એક શ્રેણીના 7 અવલોકનો છે. 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14 તો તેનો પ્રસાર શોધો.

(i) 7 (ii) 14 (iii) 1 (iv) 0

10. એક શ્રેણીનો મધ્યક 18 અને પ્રમાણિત વિચલન 9 હોય તો તેનો ચલનાંક ?

(i) 50 (ii) 200 (iii) 18 (iv) 25

જવાબ : 1. (iii) 2. (iv) 3. (iv) 4. (iv) 5. (i) 6. (iii) 7. (iii) 8. (iii) 9. (iv) 10. (i)

એકમ 2

સહસંબંધ

2.1 પ્રસ્તાવના :

આપણે પ્રથમ પ્રકરણમાં શીખી ગયા કે, એક જ ચલ માટે જુદી જુદી માહિતીની સરખામણી કરવા માટે મધ્યક, પ્રમાણિત વિચલન, વિચરણ જેવા પ્રસારના માપો ઉપયોગી છે. પરંતુ ઘણી પરિસ્થિતિ એવી ઉદ્ભવતી હોય છે કે, જેમાં બે કે તેથી વધુ ચલોનો સંયુક્ત અભ્યાસ ઈચ્છનીય અને જરૂરી હોય છે. પરંતુ બે અથવા બે થી વધારે ચલોનો અભ્યાસ કરવા માટે ઉપરોક્ત માપો ઉપયોગી નીવડતા નથી. તેથી બે અથવા બે થી વધારે ચલોના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે સહસંબંધ, નિયત સંબંધ જેવા માપોનો ઉપયોગ થાય છે.

આપણે આ પ્રકરણ અને આ પછીના પ્રકરણમાં બે પરસ્પર સંબંધિત ચલોના સંબંધ વિશે અભ્યાસ કરીશું.

2.2 સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા :

સૌ પ્રથમ આપણે સહસંબંધ એટલે શું ? તેનો અર્થ સમજીએ.

વ્યવહારમાં આપણે જાણીએ છીએ કે, ઘણી પરિસ્થિતિમાં બે ચલોની કિંમતમાં એક સાથે ફેરફાર થતો જોવા મળે છે. બે ચલોની કિંમતોમાં થતાં ફેરફાર મુખ્યત્વે બે કારણને લીધે થઈ શકે.

(1) બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોય.

(2) કોઈ અન્ય કારણની અસરને લીધે બંને ચલોની કિંમતમાં ફેરફાર થતાં હોય.

કોઈ કંપનીનું વેચાણ વધે તો તેનો નફો વધે અને વેચાણ ઘટે તો નફો ઘટે છે. અહીં વેચાણ એ 'કારણ' છે જ્યારે નફો એ 'કાર્ય' છે. તે જ રીતે કોઈ વિસ્તારમાં વરસાદ વધારે પડે (અમુક હદ સુધી) તો ખેતરની ઊપજ પણ વધે છે અને વરસાદ ઓછો પડે તો ખેતરની ઊપજ પણ ઘટે છે. તેથી વરસાદ એ 'કારણ' છે અને ખેતરની ઉપજ એ 'કાર્ય' છે.

ઉપરોક્ત બન્ને ઉદાહરણોમાં બંને ચલોમાં થતા ફેરફારો કાર્ય કારણનો સંબંધ દર્શાવે છે. ઘણી વખત બે ચલો પરસ્પર આધારિત પણ હોય છે અને એટલે કોઈ એક ચલને 'કારણ' અને બીજા ચલને 'કાર્ય' ચોક્કસપણે કહી શકાય નહીં. દા.ત. માંગ અને પુરવઠો.

આમ એક ચલમાં ફેરફાર થવાથી બીજા ચલમાં પણ ફેરફાર થતા હોય છે. ઉપરોક્ત ઉદાહરણો ઉપરથી આપણે સહસંબંધને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

વ્યાખ્યા - 1 : જો બે ચલોની કિંમતોમાં પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ કાર્ય કારણને લીધે એક સાથે ફેરફાર થતા હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

વ્યાખ્યા - 2 : બે સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતાં ફેરફાર લગભગ અચલ પ્રમાણમાં હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

દા.ત. વર્તુળની ત્રિજ્યા અને પરિઘ.

આંકડાશાસ્ત્રી કિંગે આપેલી વ્યાખ્યા મુજબ, ''સહસંબંધ એટલે બે શ્રેણી અથવા સમૂહ વચ્ચેનો કાર્ય કારણનો સંબંધ.''

2.3 સહસંબંધના પ્રકારો :

સહસંબંધના મુખ્યત્વે બે પ્રકારો છે.

(1) ઘન સહસંબંધ (2) ઋણ સહસંબંધ

(1) ઘન સહસંબંધ : જ્યારે બંન્ને સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એક જ દિશામાં થતાં હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે ઘન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

એટલે કે જ્યારે એક ચલની કિંમત ઘટે ત્યારે તેના સંબંધિત બીજા ચલની કિંમત પણ ઘટે અથવા તો એક ચલની કિમત વધે ત્યારે તેના સંબંધિત બીજા ચલની કિંમત પણ વધે તો તેમની વચ્ચે ઘન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય. વ્યક્તિની આવક અને ખર્ચ, કોઈ વસ્તુનું વેચાણ અને તેનાથી થતો નફો, વસ્તુની કિંમત અને પુરવઠો એ ઘન સહસંબંધ ના ઉદાહરણો છે.

(2) ઋણ સહસંબંધ : જ્યારે બંન્ને સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતાં ફેરફારો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં થતાં હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

એટલે કે જ્યારે એક ચલની કિંમત ઘટે (વધે) ત્યારે તેના સંબંધિત બીજા ચલની કિંમત વધે (ઘટે) તો તેમની વચ્ચે ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

વ્યક્તિનો ખર્ચ અને બચત, વસ્તુનો ભાવ અને માંગ, ઋણ સહસંબંધના ઉદાહરણો છે.

2.4 સહસંબંધાંકની વ્યાખ્યા, લાક્ષણિકતાઓ / ગુણધર્મ :

સહસંબંધાંક : બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધના સંખ્યાત્મક માપને સહસંબંધાંક કહેવાય છે અને તેને સંકેતમાં 'r' વડે દર્શાવવામાં આવે છે. દા.ત. વસ્તુના વેચાણ અને તેના નફા વચ્ચેના સહસંબંધના સંખ્યાત્મક માપને સહસંબંધાંક કહેવાય છે.

(1) સહસંબંધાંકની કિંમત –1 થી 1 સુધીના અંતરાલમાં હોય છે. એટલે કે $-1 \le r \le 1$

(2) જ્યારે સહસંબંધાંકની કિંમત 1 હોય તો, તે બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ઘન સહસંબંધ દર્શાવે છે.

(3) જ્યારે સહસંબંધાંકની કિંમત –1 હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ દર્શાવે છે.

(4) સહસંબંધાંક એકમ રહિત માપ છે.

(5) x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક તથા y અને x વચ્ચેનો સહસંબંધાંક સરખા હોય છે એટલે કે, $r(x, y) = r(y, x)$

જ્યારે ચલની કિંમતોમાં કોઈ અચળ સંખ્યા ઉમેરવામાં કે બાદ કરવામાં આવે તો તેને ઉગમબિંદુ પરિવર્તન કહે છે એટલે કે $X \pm A$. જ્યારે ચલની કિંમતોને કોઈ ઘન અચળ સંખ્યા વડે ગુણવા કે ભાગવામાં આવે તો તેને માપ પરિવર્તન કહે છે એટલે કે $\frac{X}{C_x}$ or $X \cdot C_x$

(6) ઉગમબિંદુ (Origin) અને માપ (Scale)ના પરિવર્તનથી સહસંબંધાંક બદલાતો નથી.

(7) $r(-x, y) = -r(x, y)$

$r(x, -y) = -r(x, y)$

જો બે ચલમાંથી કોઈ પણ એક ચલની કિંમતોના ચિહ્નો બદલવામાં આવે તો સહસંબંધાંકનું ચિહ્ન પણ બદલાય છે. જો બંને ચલોની કિંમતોના ચિહ્નો બદલવામાં આવે તો સહસંબંધાંકનું ચિહ્ન બદલાતું નથી.

એટલે કે, $r(-x, -y) = r(x, y)$

2.5 સહસંબંધના અભ્યાસની રીતો :

બે ચલો વચ્ચે રહેલા સહસંબંધનો પ્રકાર અને તે સંબંધની ઘનિષ્ઠતા જાણવા માટે મુખ્યત્વે નીચેની પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ થાય છે.

(1) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

(2) કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત

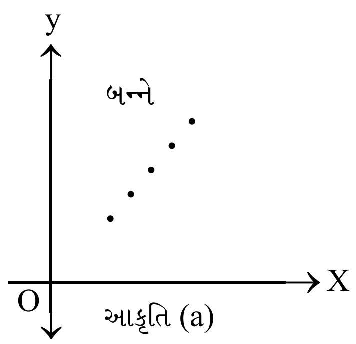
(3) સ્પિયરમેનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત

(1) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત : બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધનું સ્વરૂપ જાણવા માટે વિકીર્ણ આકૃતિની રીતનો ઉપયોગ થાય છે. આ રીતથી થોડા ઘણા અંશે બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો ખ્યાલ પણ મળે છે એટલે કે, બે ચલ વચ્ચે પૂર્ણ ઘન, પૂર્ણ ઋણ, આંશિક ઘન, આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે તે નક્કી કરી શકીએ છીએ.

આ રીતમાં ધારો કે, ચલ x અને y ની n કિંમતોની ક્રમિત જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ આપેલ હોય અને આ ક્રમિત જોડને આલેખ પત્ર ઉપર x-અક્ષર ઉપર x ની કિંમત અને y-અક્ષ ઉપર yની કિંમત બિંદુઓરૂપે મુકવામાં આવે છે. આ રીતે બિંદુઓરૂપે મળતી આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ કહેવામાં આવે છે.

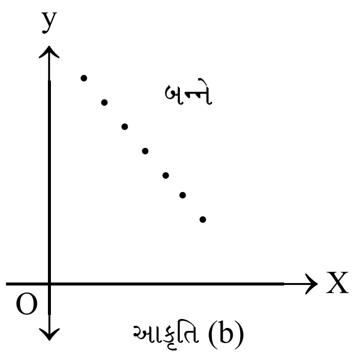
વિકીર્ણ આકૃતિમાં દર્શાવેલા બિંદુઓની ઢબ પરથી સહસંબંધના પ્રકાર તથા તેમની વચ્ચેની સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો ખ્યાલ નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

જો બન્ને ચલોના બિંદુઓ આકૃતિ (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરની દિશા તરફ જતી સુરેખ પર આવેલ હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ઘન સહસંબંધ છે તેમ કહી શકાય.



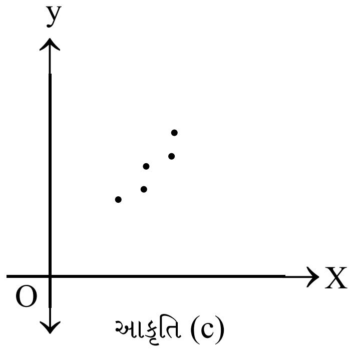
આકૃતિ (a)

જો બન્ને ચલોના બિંદુઓ આકૃતિ (b)માં દર્શાવ્યા મુજબ ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેની દિશા તરફ જતી સુરેખ પર આવેલ હોય તો તે બે ચલો વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહી શકાય.



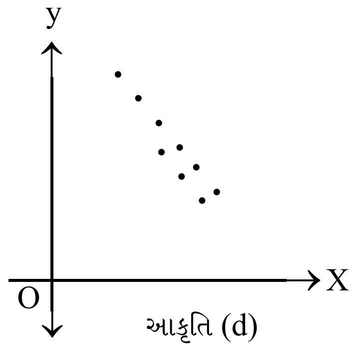
આકૃતિ (b)

જો બન્ને ચલોના બિંદુઓ આકૃતિ (c)માં દર્શાવ્યા મુજબ ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપર તરફ જતી સુરેખની આજુબાજુ આવેલ હોય તો બે ચલો વચ્ચે આંશિક ઘન સહસંબંધ છે તેમ કહી શકાય.



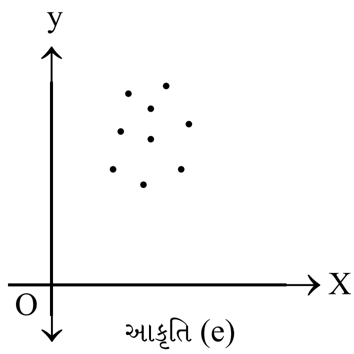
આકૃતિ (c)

જો બન્ને ચલોના બિંદુઓ આકૃતિ (d)માં દર્શાવ્યા મુજબ ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચે તરફ જતી સુરેખની આજુબાજુ આવેલ હોય તો બે ચલો વચ્ચે આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહી શકાય.



આકૃતિ (d)

જો બન્ને ચલોના બિંદુઓ આકૃતિ (e)માં દર્શાવ્યા મુજબ યાદચ્છિક રીતે વિખરાયેલા હોય અને કોઈ ચોક્કસ ઢબ (pattern)માં ન હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધનો અભાવ છે તેમ કહી શકાય.



આકૃતિ (e)

વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ગુણદોષ :

ગુણ :

(1) બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધ નક્કી કરવાની આ સરળ રીત છે.

(2) આ રીતમાં ફક્ત આલેખમાં બિંદુના નિરૂપણ અંગેની સમજની જરૂર પડે છે.

(3) આ રીતથી બે ચલો વચ્ચે કયા પ્રકારનો સહસંબંધ છે તે જ માત્ર જાણી શકાય છે.

દોષ : આ રીતથી સહસંબંધના પ્રમાણ વિશેનું ચોક્કસ માપ મળતુ નથી.

(2) કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત :

સહસંબંધાંકનું માપ આંકડાશાસ્ત્રી કાર્લ પિયર્સને સૌ પ્રથમ સૂચવ્યુ હતું. તેથી તેને 'પિયર્સન સહસંબંધાંક' કે 'ગુણનપ્રઘાતઆંક' તરીકે પણ ઓળખાય છે.

ધારો કે બે ચલ x અને y પર મેળવેલા એક નિદર્શના n અવલોકનોની જોડ (x_1, y_1), (x_2, y_2),.....,(x_n, y_n) છે. $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ અનુક્રમે x અને yના મધ્યક છે તથા S_x અને S_y અનુક્રમે x અને yના પ્રમાણિત વિચલન હોય તો કાર્લ પિયર્સને આ માપોને લક્ષમાં લઈ સહસંબંધાંક (r)નું સૂત્ર નીચે મુજબ મેળવેલ હતું.

$$\text{સહસંબંધાંક} = r = \frac{Cov(x, y)}{S_x S_y} = \frac{\text{સહવિચલન } (x, y)}{(x \text{ નું પ્રમાણિત વિચલન})(y\text{નું પ્રમાણિત વિચલન})}$$

જ્યાં સહવિચલન (x, y) = Cov (x, y) $= \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$

xનું પ્રમાણિત વિચલન $= S_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$

yનું પ્રમાણિત વિચલન $= S_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n}}$

xનો મધ્યક $= \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

yનો મધ્યક $= \bar{y} = \frac{\sum y}{n}$

Cov (x, y), S_x, S_y ની ઉપર્યુક્ત કિંમતોને સૂત્ર (1) માં મૂકતા, 'r'નું નીચેનું સ્વરૂપ મળે છે.

$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y-\bar{y})^2}}$$

સામાન્ય રીતે જ્યારે $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક હોય ત્યારે ઉપરોક્ત સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

સહસંબંધાંક r માટેના બીજા કેટલાક સૂત્રો નીચે મુજબ છે. :

જ્યારે x અને yના પ્રાપ્તાંકની કિંમત નાની હોય ત્યારે $\sum x, \sum y, \sum xy, \sum x^2, \sum y^2$ મેળવીને નીચેના સૂત્રમાં મુકી r ની કિંમત મેળવવી સરળ પડે છે.

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

જ્યારે x અને y ના પ્રાપ્તાંકની કિંમત મોટી હોય અને $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે નવા રૂપાંતરિત ચલ d_x અને d_yનો ઉપયોગ કરી 'r'ની કિંમત નીચેના સૂત્ર મુજબ મેળવી શકાય.

$$r = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{\sqrt{n\sum d_x^2 - (\sum d_x)^2}\sqrt{n\sum d_y^2 - (\sum d_y)^2}}$$

જ્યાં $d_x = \frac{x-A}{C_x}$ અને $d_y = \frac{y-B}{C_y}$

અહીં A, B, C_x, C_y એ અનુકૂળ વાસ્તવિક અચળાંકો છે.

જ્યારે $\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}), S_x, S_y$ અને n જેવા માપ આપેલ હોય ત્યારે 'x'ની કિંમત નીચેના સૂત્ર મુજબ મેળવી શકાય.

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{nS_x S_y}$$

જ્યારે $\sum xy, \bar{x}, \bar{y}, S_x, S_y$ અને n જેવા માપ જાણતા હોઈએ ત્યારે 'r'ની કિંમત નીચે મુજબના સૂત્ર પ્રમાણે મેળવી શકાય.

$$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{nS_x\, S_y}$$

કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ધારણાઓ :

કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક નીચેની ધારણાઓ પર આધારિત છે.

(1) બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સંબંધ હોવો જોઈએ.

(2) બે ચલ વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ હોવો જોઈએ.

(a) વર્ગના મૂલ્યોની રીત (Square of values method) :

ઉદાહરણ -1 નીચે આપેલ બે ચલોના જોડકાં ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

(1,2) (2, 4) (3, 8) (4, 7) (5, 10) (6, 5) (7, 14) (8, 16) (9, 2) (10, 20)

જવાબ : અહીં આપેલ જોડકાંની સંખ્યા 10 છે. તેથી n = 10

x	y	x^2	y^2	xy
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	8	9	64	24
4	7	16	49	28
5	10	25	100	50
6	5	36	25	30
7	14	49	196	98
8	16	64	256	128
9	2	81	4	18
10	20	100	400	200
$\sum x = 55$	$\sum y = 88$	$\sum x^2 = 385$	$\sum y^2 = 1114$	$\sum xy = 586$

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\,\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$r_{xy} = \frac{10(586) - (55)(88)}{\sqrt{10(385) - (55)^2}\,\sqrt{10(1114) - (88)^2}}$$

$$r = \frac{1020}{\sqrt{825}\,\sqrt{3396}}$$

$$r = \frac{1020}{1673.827}\ r = 0.609$$

(b) સીધી રીત (Direct method) :

ઉદાહરણ - 2 આપેલ માહિતી ઉપરથી ભાઈ અને બહેનની ઊંચાઈના કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

ભાઈની ઊંચાઈ	65	66	67	68	69	70	71
બહેનની ઊંચાઈ	67	68	66	69	72	72	69

જવાબ : ધારો કે ભાઈની ઊંચાઈ x અને બહેનની ઊંચાઈ y છે.

અહીં $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{476}{7} = 68$ અને $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{483}{7} = 69$ થશે.

x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	y	$(y-\bar{y})$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
65	-3	9	67	-2	4	6
66	-2	4	68	-1	1	2
67	-1	1	66	-3	9	3
68	0	0	69	0	0	0
69	1	1	72	3	9	3
70	2	4	72	3	9	6
71	3	9	69	0	0	0
કુલ		28			32	20

$$r_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y-\bar{y})^2}}$$

$$r = \frac{20}{\sqrt{28}\sqrt{32}}$$

$r = 0.668$

(c) ટૂંકી રીત (Short method)

ઉદાહરણ - 3 આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

x	2	6	8	10	14	16	20
y	1	3	4	5	7	8	10

જવાબ : અહીં $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{76}{7} = 10.85$ અને $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{38}{7} = 5.42$ થશે.

અહીં x અને yના મધ્યકો અપૂર્ણાંકમાં છે. તેથી x અને yના ધારેલ મધ્યક અનુક્રમે 10 અને 5 લેતાં.

x	$d_x = x - 10$	d_x^2	y	$d_y = y - 5$	d_y^2	$d_x d_y$
2	-8	64	1	-4	16	32
6	-4	16	3	-2	4	8
8	-2	4	4	-1	1	2
10	0	0	5	0	0	0
14	4	16	7	2	4	8
16	6	36	8	3	9	18
20	10	100	10	5	25	50
કુલ	6	236		3	59	118

$$r = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{\sqrt{n\sum d_x^2 - \left(\sum d_x\right)^2}\sqrt{n\sum d_y^2 - \left(\sum d_y\right)^2}}$$

$$r = \frac{7\,(118) - (6)(3)}{\sqrt{7(236) - (6)^2}\sqrt{7(59) - (3)^2}}$$

$$r = 1$$

ઉદાહરણ - 4 આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

x	78	89	96	69	59	79	68	61
y	125	137	156	112	107	136	123	108

અહીં x અને yના ધારેલ મધ્યકો અનુક્રમે 69 અને 112 લઈને ગણતરી કરો.

જવાબ :

x	$d_x = x - 69$	d_x^2	y	$d_y = y - 112$	d_y^2	$d_x d_y$
78	9	81	125	13	169	117
89	20	400	137	25	625	500
96	27	729	156	44	1936	1188
69	0	0	112	0	0	0
59	-10	100	107	-5	25	50
79	10	100	136	24	576	240
68	-1	1	123	11	121	-11
61	-8	64	108	-4	16	32
કુલ	47	1475		108	3468	2116

$$r = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{\sqrt{n\sum d_x^2 - \left(\sum d_x\right)^2}\sqrt{n\sum d_y^2 - \left(\sum d_y\right)^2}}$$

$$r = \frac{8(2116) - (47)(108)}{\sqrt{8(1475) - (47)^2}\sqrt{8(3468) - (108)^2}}$$

$r = 0.955$

ઉદાહણ - 5 એક વ્યક્તિએ બે ચલના 25 અવલોકનો ઉપરથી નીચેની માહિતી મેળવેલ છે.

$\sum x = 125, \sum x^2 = 650, \sum y = 100, \sum y^2 = 460, \sum xy = 508$

ઉપરોક્ત માહિતી તપાસતા માલૂમ પડ્યું કે અવલોકનો બે જોડકાં (6, 14) અને (8, 6) ખોટા લખાયેલ હતાં જ્યારે સાચા અવલોકનો (8, 12) અને (6, 8) છે. તો સાચો સહસંબંધાંક શોધો.

જવાબ : અહીં ખોટાં જોડકાં (6, 14) અને (8, 6) છે. જ્યારે સાચા (8, 12) અને (6, 8) છે.

તેથી સાચી કિંમત $\sum x = 125 - 6 - 8 + 8 + 6 = 125$

$\sum y = 100 - 14 - 6 + 12 + 8 = 100$

$\sum x^2 = 650 - 6^2 - 8^2 + 8^2 + 6^2 = 650$

$\sum y^2 = 450 - 14^2 - 6^2 + 12^2 + 8^2 = 436$

$\sum xy = 508 - (6)(14) - (8)(6) + (8)(12) + (6)(8) = 520$ થશે.

ઉપરોક્ત સાચી કિંમત નીચેના સૂત્રમાં મૂકતા,

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\sqrt{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}}$$

$$r = \frac{25\left(520\right) - \left(125\right)\left(100\right)}{\sqrt{25\left(650\right) - \left(125\right)^2}\sqrt{25\left(436\right) - \left(100\right)^2}}$$

$r = 0.67$

ઉદાહરણ - 6 નીચેની કિંમત ઉપરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$$n = 100, 1.5\,\overline{x} = \overline{y} = 30, \sum y\left(y + 4\right) = 104500, \sum x\left(x + y\right) = 103200$$

જવાબ : $n = 100, 1.5\overline{X} = 30, \sum X(X + 3) = 47600$

$\overline{X} = 30/1.5 = 20$

$\overline{x} = 20$

$\sum x = n\overline{x} \Rightarrow \sum x = 100\left(20\right) = 2000$

$\overline{y} = 30 \Rightarrow \sum y = n\overline{y} \Rightarrow \sum y = 100\left(30\right) = 3000$

$$\sum x\left(x + 3\right) = 47600 \Rightarrow \sum\left(x^2 + 3x\right) = 47600$$
$$\Rightarrow \sum x^2 + 3\sum x = 47600$$
$$\Rightarrow \sum x^2 + 3\left(2000\right) = 47600$$
$$\Rightarrow \sum x^2 = 41600$$

$$\sum y\left(y + 4\right) = 104500 \Rightarrow \sum\left(y^2 + 4y\right) = 104500$$
$$\Rightarrow \sum y^2 + 4\sum y = 104500$$
$$\Rightarrow \sum y^2 + 4\left(3000\right) = 104500$$
$$\Rightarrow \sum y^2 = 92500$$

$$\sum x\left(x + y\right) = 103200 \Rightarrow \sum\left(x^2 + xy\right) = 103200$$
$$\Rightarrow \sum x^2 + \sum xy = 103200$$
$$\Rightarrow 41600 + \sum xy = 103200$$
$$\Rightarrow \sum xy = 61600$$

ઉપરોક્ત કિંમતો નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\sqrt{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}}$$

$$r_{xy} = \frac{100(61600) - (2000)(3000)}{\sqrt{100(41600) - (2000)^2}\sqrt{100(92500) - (3000)^2}}$$

$$r = \frac{160000}{(400)(500)}$$

$$r = \frac{16}{20} = 0.8$$

ઉદાહરણ - 7 નીચેની માહિતી પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$$n = 10, \bar{x} = 21, \bar{y} = 22, \sum xy = 4220, V(x) = 100, V(y) = 144$$

જવાબ : $r_{xy} = \frac{\sum xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{ns_x s_y}$

$[V(x) = 100 \Rightarrow S_x = 10,\ V(y) = 144 \Rightarrow S_y = 12]$

$$r_{xy} = \frac{4220 - 10(21)(22)}{10(10)(12)}$$

$$r_{xy} = \frac{-400}{1200} = -0.33$$

ઉદાહરણ - 8 જો બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધાંક 0.3 હોય, તેનું સહવિચલન 9 હોય તથા xનું વિચલન 16 હોય તો yનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

જવાબ : $\text{Cov.}(x, y) = 9, r = 0.3, S_x^2 = 16 \Rightarrow S_x = 4$

$$r = \frac{\text{Cov.}(x, y)}{S_x S_y}$$

$$0.3 = \frac{9}{4S_y} \Rightarrow S_y = \frac{9}{(0.3)(4)} \Rightarrow S_y = 7.5$$

દ્વિચલ વર્ગીકૃત માહિતી પરથી સહસંબંધાંક :

બે ચલની કિંમતોના જોડકાં પરથી સહસંબંધાંક કેવી રીતે શોધવો તે આપણે જોયું. જ્યારે બે ચલોની કિંમતોના જોડકાંની સંખ્યા ખૂબ જ મોટી હોય ત્યારે માહિતીને ટૂંકા સ્વરૂપમાં દર્શાવવા વર્ગીકરણનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. અહીં પ્રત્યેક ચલની કિંમતોને ધ્યાનમાં લઈ બંને ચલની કિંમતો દર્શાવતા પ્રત્યેક જોડકાંનું વર્ગીકરણ કરવામાં આવે છે. આ પ્રકારના વર્ગીકરણને દ્વિચલ વર્ગીકૃત કોષ્ટક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

દ્વિચલ કોષ્ટક પરથી સહસંબંધાંક શોધવા માટેનું કાર્લ પિયર્સનનું સૂત્ર નીચે પ્રમાણે છે.

$$r = \frac{n\sum fd_x d_y - \sum f_x d_x \sum f_y d_y}{\sqrt{n\sum f_x d_x^2 - (\sum f_x d_x)^2}\sqrt{n\sum f_y d_y^2 - (\sum f_y d_y)^2}}$$

જ્યાં $d_x = \frac{x - A}{C_x}$ અને $d_y = \frac{y - B}{C_y}$

A અને B અનુક્રમે x અને yના ધારેલા મધ્યકની કિંમત તથા C_x અને C_y અનુક્રમે x અને yની વર્ગલંબાઈ છે.

ઉપરના સૂત્રમાં જરૂરી કિંમતો મેળવવાની રીત નીચે મુજબ છે.

(1) હારમાં દર્શાવેલ વર્ગોને ચલ xના વર્ગો તથા સ્તંભમાં દર્શાવેલા વર્ગોને ચલ yના વર્ગો કહો.

(2) હારમાં દરેક વર્ગની મધ્યકિંમતને x તથા સ્તંભના દરેક વર્ગની મધ્યકિંમત y વડે દર્શાવો.

(3) હાર તથા સ્તંભ માટે ધારેલા મધ્યકો અનુક્રમે A અને B લો. ચલ xની વર્ગલંબાઈ C_x અને ચલ yની વર્ગ લંબાઈ C_y હોય તો મધ્યકિંમતો x અને y ઉપરથી વિચલનો d_x અને d_y નીચે પ્રમાણે મેળવો.

$$d_x = \frac{x - A}{C_x}, \quad d_y = \frac{y - B}{C_y}$$

(4) x ના પ્રત્યેક વર્ગ માટે આવૃત્તિ f_x અને d_xના ગુણાકાર કરી તેનો સરવાળો $\sum f_x d_x$ મેળવો. તેવી જ રીતે d_yના પ્રત્યેક વર્ગ માટે આવૃત્તિ f_y અને d_yના ગુણાકાર કરી તેનો સરવાળો $\sum f_y d_y$ મેળવો.

(5) xના પ્રત્યેક વર્ગ માટે $f_x d_x$ અને d_x ના ગુણાકાર કરી $\sum f_x d_x^2$ મેળવો.તેવી જ રીતે $\sum f_y d_y^2$ મેળવો.

(6) દરેક ખાના માટે f, d_x, d_y નો ગુણાકાર મેળવી અને તે જ ખાનામાં જમણી બાજુ ઉપરની બાજુએ ખાનામાં દર્શાવો. હવે પ્રત્યેક વર્ગ માટે આ ખાનામાં દર્શાવેલ કિંમતોનો સરવાળો $\sum fd_x d_y$ મેળવો.

ઉદાહરણ - 9 નીચે આપેલ દ્વિચલ આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક ઉપરથી ઊંચાઈ અને વજન વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

વજન	ઊંચાઈ (ઈંચ)					
(પાઉન્ડ)	**40-44**	**44-48**	**48-52**	**52-56**	**56-60**	**60-64**
35-55	4	40	60	-	-	-
55-75	-	-	24	88	12	-
75-95	-	-	-	8	32	8
95-115	-	-	-	-	4	8
115-135	-	-	-	4	-	-
135-155	-	-	-	-	4	4

જવાબ : ધારો કે x શ્રેણીમાં ધારેલ મધ્યક 50 છે. તેથી $d_x = \frac{x - 50}{4}$ થશે. ધારો કે y શ્રેણીમાં ધારેલ મધ્યક 85 છે. તેથી $d_y = \frac{y - 85}{10}$ થશે.

			ઊંચાઈ									
			40-44	44-48	48-52	52-56	56-60	60-64				
		મ.કિ.x	42	46	50	54	58	62				
	મ.કિ.y	d_y d_X	-2	-1	0	1	2	3	f_y	$f_y d_y$	$f_y d_y^2$	$fd_x d_y$
35-55	45	-2	$\boxed{16}$ 4	$\boxed{80}$ 40	$\boxed{0}$ 60	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	104	-208	416	96
55-75	65	-1	0	0	$\boxed{0}$ 24	$\boxed{-88}$ 88	$\boxed{-24}$ 12	$\boxed{0}$	124	-124	124	-112
75-95	85	0	0	0	0	$\boxed{0}$ 8	$\boxed{0}$ 32	$\boxed{0}$ 8	48	0	0	0
95-115	105	1	0	0	0	0	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{24}$ 8	12	12	12	32
115-135	125	2	0	0	0	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 0	4	8	16	8
135-155	145	3	0	0	0	0	$\boxed{24}$ 4	$\boxed{36}$ 4	8	24	72	60
		$f_x \rightarrow$	4	40	84	100	52	20	n = 300	$\Sigma f_y d_y$ - 288	Σfd_y^2 = 640	$\Sigma fd_x d_y$ = 84
		$f_x d_x \rightarrow$-	8	-40	0	100	104	60	$\Sigma f_x d_x$ = 216			
		$f_x d_x^2 \rightarrow$	16	40	0	100	208	180	$\Sigma f_x d_x^2$ = 544			
		$fd_x d_y \rightarrow$	16	80	0	-80	8	60	$\Sigma fd_x d_y$ = 84			

ઉપરોક્ત કોષ્ટક પરથી મળેલ કિંમતો નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$N = 300 \sum fd_x d_y = 84, \sum f_x d_x = 216$$

$$\sum f_x d_x^2 = 544, \sum f_y d_y = -288, \sum f_y d_y^2 = 640$$

$$r = \frac{n\sum fd_x d_y - \left(\sum f_x d_x\right)\left(\sum f_y d_y\right)}{\sqrt{n\sum f_x d_x^2 - \left(\sum f_x d_x\right)^2}\sqrt{n\sum f_y d_y^2 - \left(\sum f_y d_y\right)^2}}$$

$$r = \frac{300 \times 84 - (216)(-288)}{\sqrt{300 \times 544 - (216)^2}\sqrt{300 \times 640 - (-288)^2}}$$

$$r = \frac{25200 + 62208}{\sqrt{163200 - 46656}\sqrt{192000 - 82944}}$$

$$r = \frac{87408}{\sqrt{116544} \times \sqrt{109056}}$$

$$r = \frac{87408}{(341.39) \times (330.23)}$$

$$r = 0.78$$

કાર્લ પિયર્સનની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ :

ગુણ :

(1) સહસંબંધ મેળવવા માટેની આ એક મહત્ત્વની રીત છે.

(2) જ્યારે જથ્થાવાચક માહિતી આપેલ હોય ત્યારે ઉપયોગી થાય છે.

(3) બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધનો પ્રકાર તેમજ તેમની વચ્ચેના સંબંધની ઘનિષ્ઠતા પણ જાણી શકાય છે.

(4) તે સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા (વધુ, સામાન્ય કે ઓછી) ને એક સંખ્યામાં દર્શાવે છે.

(5) નિદર્શ સહસંબંધાંક અને સંભવિત દોષ (Probable Error) ઉપરથી સમષ્ટિના સહસંબંધાંકનો વિસ્તાર મેળવી શકાય.

મર્યાદા

(1) આ રીત બે ચલ વચ્ચે રેખીય સંબંધ હોય ત્યારે જ ઉપયોગ કરી શકાય છે.

(2) અંતિમ અવલોકના (ખૂબ મોટા અથવા ખૂબ નાના પ્રાપ્તાંકો)ની સહસંબંધાંક ઉપર ખૂબ જ અસર થાય છે.

(3) સહસંબંધાંકની બીજી રીતો કરતા આ રીત વધારે સમય લે છે.

(4) આ રીતે મળતા સહસંબંધાંકનું અર્થઘટન બહુ જ સાવચેતીપૂર્વક કરવું પડે છે.

3. સ્પિયરમેનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત :

આપણે આગળ જોયું કે, જ્યારે બંને ચલોને સંખ્યાત્મક રીતે માપી શકાય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતનો ઉપયોગ થાય છે પણ ઘણી વાર બે ચલોની માહિતી ગુણધર્મને આધારે આપેલી હોય છે. જેમ કે, સુંદરતા, પ્રામાણિકતા, આવડત વગેરે. આ પરિસ્થિતિમાં આ ગુણધર્મો (લક્ષણો)ને સંખ્યાત્મક સ્વરૂપે માપી શકાતા નથી. પરંતુ તે ચલને કિંમતને બદલે તેને ક્રમ આપી શકાય છે.

આ રીતે મળતા બે લક્ષણોની ક્રમોની જોડ પરથી મેળવેલા સહસંબંધાંકને સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક કહેવાય છે.

સ્પિયરમેનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં 'n' કિંમતોના બે સમૂહોને કોઈ ચોક્કસ ગુણધર્મ (પ્રામાણિકતા, ગરીબાઈ, સાક્ષરતા, હોશિયારી વગેરે) પ્રમાણે ક્રમાંક આપવામાં આવે છે.

કેટલીક વખત જ્યારે ચલના પ્રાપ્તાંકોની કિંમત ખૂબ જ મોટી હોય અને તેનો પ્રસાર પણ વધારે હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક મેળવવાને બદલે ક્રમાંક સહસંબંધાંક મેળવાય છે.

આ રીતમાં જ્યારે અવલોકનની n જોડ સંખ્યાત્મક ચલની હોય ત્યારે સામાન્ય રીતે એક ચલના સૌથી નાના અવલોકનને ક્રમ 1, ત્યાર બાદ તેનાથી મોટા પણ બાકીના અવલોકનોથી નાના હોય તેવા અવલોકન ને ક્રમ 2 એ મુજબ બધા જ અવલોકનોને ક્રમ આપવામાં આવે છે. તે જ રીતે બીજા ચલની કિંમતોને ક્રમ આપવામાં આવે છે.

આમ જ્યારે બે શ્રેણી વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધ મેળવવો હોય તો તે બે શ્રેણીના અવલોકનોને ઉપર મુજબ ક્રમ આપવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ દરેક જોડકાંના ક્રમોનો તફાવત d મેળવી d^2 શોધવામાં આવે છે અને તેનો સરવાળો $\sum d^2$ મેળવાય છે.

ઉપરોક્ત $\sum d^2$ ની કિંમત સ્પિયરમેનના નીચે મુજબના સૂત્રમાં મૂકવાથી ક્રમાંક સહસંબંધાંકની કિંમત મળશે.

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

ઉદાહરણ - 10 નીચેના કોષ્ટકમાં અમૂક કંપનીના શેર તથા ડિબેન્ચરના અલગ અલગ વર્ષના ભાવ આપવામાં આવેલ છે.

વર્ષ	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
શેર	97.5	99.4	98.6	92.2	95.1	98.4	97.1
ડિબેન્ચર	75.1	75.9	77.1	78.2	79.0	74.8	76.2

ક્રમાંક સહસંબંધની રીતે શેર અને ડિબેન્ચર વચ્ચેના ભાવોનો સંબંધ શોધો

જવાબ : સૌથી પહેલા x અને y શ્રેણીને ચઢતા ક્રમમાં ક્રમ આપો.

x	**R_x**	**y**	**R_y**	**$d = R_x - R_y$**	**d^2**
97.5	4	75.1	2	2	4
99.4	7	75.9	3	4	16
98.6	6	77.1	5	1	1
92.2	1	78.2	6	-5	25
95.1	2	79.0	7	-5	25
98.4	5	74.8	1	4	16
97.1	3	76.2	4	-1	1
				કુલ	$\sum d^2 = 88$

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

$$r = 1 - \frac{6(88)}{7(7^2 - 1)}$$

$$r = 1 - 1.571$$

$$r = -0.571$$

અવલોકનો સમાન હોય (Tie in Observations) :

જ્યારે ચલ x અથવા y અથવા બંન્ને ચલના અવલોકનોની અમુક કિંમત સમાન હોય તેને ગાંઠ (Tie) ઉદ્‌ભવે છે તેમ કહી શકાય. આવા કિસ્સામાં પુનરાવર્તન પામતા બધા અવલોકનોને તેમને અનુરૂપ ક્રમોની સરેરાશ જેટલો ક્રમ ગાંઠમાંના દરેક અવલોકનોને આપવામાં આવે છે.

ધારો કે 5 વિદ્યાર્થીના I.Q. Testના ગુણ અનુક્રમે 83, 85, 87, 84, 85 છે. તો આ ગુણને ક્રમ આપવા હોય તો સૌથી ઓછા ગુણ 83ને ક્રમ 1 અપાય, ગુણ 84 ને ક્રમ 2 અપાય હવે ગુણ 85 બે વિદ્યાર્થીને છે. તેમનો ક્રમ 3 અને ક્રમ 4 છે. તેથી બંનેને ક્રમ 3 અને ક્રમ 4 નો સરેરાશ ક્રમ $\frac{3+4}{2} = 3.5$ આપવો પડે. ત્યારબાદ ગુણ 87 ને ક્રમ 5 અપાય.

હવે જ્યારે અમુક અવલોકનો સમાન હોય ત્યારે ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરી કરવા માટે, CF (Correction factor)ની વધારાની ગણતરી કરવી પડે.

CF શોધવા માટે પ્રત્યેક પુનરાવર્તન પામતા અવલોકનના સમુહ દીઠ $\left(\frac{m^3 - m}{12}\right)$ પદ $\sum d^2$ માં ઉમેરવામાં આવે છે. જ્યાં m, અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે છે તે સંખ્યા દર્શાવે છે. ઉપરોક્તથી ઉદાહરણમાં 85 બે વખત આવેલ છે તેથી m = 2 થશે.

આમ જ્યારે ક્રમ આપવામાં અમુક અવલોકનો સમાન હોય ત્યારે ક્રમાંક સહસંબંધાંકનું સૂત્ર નીચે મુજબ થશે.

$$r = 1 - \frac{6\left[\sum d^2 + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right) + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right) + ...\right]}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

ઉદાહરણ - 11 નીચેના કોષ્ટકમાં વિદ્યાર્થીઓએ એકાઉન્ટ અને આંકડાશાસ્ત્રમાં આવેલ ગુણ આપેલ છે. તે બંને વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધની રીતે સહસંબંધાંક મેળવો.

એકાઉન્ટના ગુણ	15	20	25	12	40	60	20	80
આંકડાશાસ્ત્રના ગુણ	40	30	50	30	20	10	30	60

જવાબ :

x	R_x	y	R_y	$d = R_x - R_y$	$d^2 = (R_x - R_y)^2$
15	2	40	6	-4	16
20	3.5	30	4	-0.5	0.25
25	5	50	7	-2	4.0
12	1	30	4	-3	9.00
40	6	20	2	4	16.00
60	7	10	1	6	36.00
20	3.5	30	4	-0.5	0.25
80	8	60	8	0	0
					$\sum d^2 = 81.5$

અહીં શ્રેણી xમાં 20, એ 2 વખત આવે છે $\therefore m = 2$ થશે.

તેમજ શ્રેણી yમાં 30, એ 3 વખત આવે છે. $\therefore m = 3$ થશે. આ કિંમત નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં.

$$r = 1 - \frac{6\left\{\sum d^2 + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right) + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right) + \ldots\right\}}{n^3 - n}$$

$$r = 1 - \frac{6\left\{81.5 + \frac{1}{12}\left(2^3 - 2\right) + \frac{1}{12}\left(3^3 - 3\right)\right\}}{8^3 - 8}$$

$$r = 1 - \frac{6\{81.5 + 0.5 + 2\}}{504}$$

$$r = 1 - \frac{504}{504}$$

$r = 0$

ઉદાહરણ - 12 ત્રણ નિર્ણાયકોએ 10 સ્પર્ધકોને આપેલ ક્રમ નીચે મુજબ છે. કયા બે નિર્ણાયકો વચ્ચે વધારે સંબંધ છે તે શોધો.

નિર્ણાયક-1	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7
નિર્ણાયક-2	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
નિર્ણાયક-3	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8

જવાબ :

R_1	R_2	R_3	$d_{12} = R_1 - R_2$	d_{12}^2	$d_{13} = R_1 - R_3$	d_{13}^2	$d_{23} = R_2 - R_3$	d_{23}^2
6	3	1	3	9	5	25	2	4
4	5	6	-1	1	-2	4	-1	1
9	8	5	1	1	4	16	3	9
8	4	10	4	16	-2	4	-6	36
1	7	3	-6	36	-2	4	4	16
2	10	2	-8	64	0	0	8	64
3	2	4	1	1	-1	1	-2	4
10	1	9	9	81	1	1	-8	64
5	6	7	-1	1	-2	4	-1	1
7	9	8	-2	4	-1	1	1	1
			કુલ	$\sum d_{12}^2 = 214$		$\sum d_{13}^2 = 60$		$\sum d_{23}^2 = 200$

$$r_{12} = 1 - \frac{6\sum d_{12}^2}{n(n^2-1)} \qquad r_{13} = 1 - \frac{6\sum d_{13}^2}{n(n^2-1)} \qquad r_{23} = 1 - \frac{6\sum d_{23}^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_{12} = 1 - \frac{6(214)}{10(100-1)} \qquad r_{13} = 1 - \frac{6(60)}{10(100-1)} \qquad r_{23} = 1 - \frac{6(200)}{10(100-1)}$$

$$r_{12} = -0.2970 \qquad r_{13} = 0.6363 \qquad r_{23} = 0.2121$$

અહીં r_{13} એટલે કે નિર્ણાયક-1 અને નિર્ણાયક-3 વચ્ચે વધારે સંબંધ છે.

ઉદાહરણ - 13 બે ચલ x અને y વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.143 છે તથા ક્રમના તફાવતોનો વર્ગનો સરવાળો 48 છે. અવલોકનોની સંખ્યા મેળવો.

જવાબ : અહીં $r = 0.143, \sum d^2 = 48$ આપેલ છે.

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$0.143 = 1 - \frac{6(48)}{n(n^2-1)}$$

$$0.143 = 1 - \frac{288}{n(n^2-1)}$$

$$\frac{288}{n(n^2-1)} = 1 - 0.143$$

$$\frac{288}{n(n^2-1)} = 0.857$$

$$\therefore n\left(n^2-1\right)=\frac{288}{0.857}$$

$$\therefore n\left(n^2-1\right)=336$$

$$\left(n-1\right)n\left(n+1\right)=6\times7\times8$$

$$n=7$$

∴ આપેલ વિગતોના અવલોકનોની સંખ્યા 7 છે.

સ્પિયરમેનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ :

ગુણ :

(1) કાર્લ પિયર્સનની રીત કરતા આ રીત સમજવામાં સરળ છે.

(2) જ્યારે ગુણધર્મ પ્રમાણે માહિતી આપેલ હોય ત્યારે આ રીત ઉપયોગી છે.

(3) જ્યારે માહિતીમાં પ્રસાર વધુ હોય અથવા અવલોકનોની કિંમત ખૂબ જ મોટી હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતને બદલે સ્પિયરમેનની રીતનો ઉપયોગ કરવો યોગ્ય છે.

(4) જ્યારે બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સંબંધ ન હોય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ થઈ શકે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) સતત આવૃત્તિ વિતરણ આપેલ હોય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ કરી શકાતો નથી.

(2) આ રીત કાર્લ પિયર્સનની રીત જેટલી ચોક્કસ નથી.

(3) જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા વધુ હોય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ કરવામાં તકલીફ થાય છે.

2.6 સંભવિત દોષ (Probable Error) :

એક જ સમષ્ટિમાંથી જુદા જુદા નિદર્શો લઈ તેનો સહસંબંધાંક શોધવામાં આવે તો તે દરેકની કિંમત જુદી જુદી મળે છે. આ કિંમતો જુદી આવવાનું કારણ નિદર્શન પદ્ધતિને લઈને થતી ભૂલોની અસર છે.

વ્યાખ્યા : સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની કિંમત અને સમષ્ટિમાંથી યાદચ્છિક નિદર્શન પદ્ધતિથી પસંદ કરેલા નિદર્શોના સહસંબંધાંકોની કિંમતો વચ્ચેના તફાવતોની સરેરાશને સંભવિત દોષ કહે છે.

કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની કિંમતના સંભવિત દોષ જાણવા નીચેનું સૂત્ર ઉપયોગમાં લેવાય છે.

P.E. = સંભવિત દોષ $=0.6745\,\frac{\left(1-r^2\right)}{\sqrt{n}}$

જ્યાં r = નિદર્શ પરથી મળેલ સહસંબંધાંક

n = જોડકાની કુલ સંખ્યા

ઉપરના સુત્રમાં nની કિંમત જેમ જેમ વધે તેમ તેમ સંભવિત દોષની કિંમત ઘટશે.

સંભવિત દોષની મદદથી બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધાંક છે કે નહીં તે નીચે મુજબ નક્કી કરી શકાય.

(1) જો સહસંબંધાંકની કિંમત 6(P.E.) કરતા મોટી હોય ($r>6$ P.E.) તો બે ચલ વચ્ચે વધુમાં વધુ પ્રમાણમાં સહસંબંધ છે તથા તે સાર્થક છે તેમ કહેવાય.

(2) જો સહસંબંધાંકની કિંમત P.E. કરતા નાની હોય ($r < P.E.$) તો બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ નથી તેમ કહેવાય.

(3) જો સંભવિત દોષ પ્રમાણમાં નાનો હોય અને જો સહસંબંધાંક 0.5 થી વધુ હોય તો બે ચલો વચ્ચે સૂચક સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

(4) જો સંભવિત દોષ પ્રમાણમાં નાનો હોય અને જો સહસંબંધાંક 0.3 થી ઓછો હોય તો સુરેખ સહસંબંધનું અસ્તિત્વ નહિવત છે તેમ કહેવાય.

(5) સંભવિત દોષ ઉપરથી સમષ્ટિનો સહસંબંધાંક (ρ) કયાં વિસ્તારમાં આવેલ હશે તે નીચે મુજબના અંતરાલ ઉપરથી નક્કી કરી શકાય.

$(r - P.E. < \rho < r + P.E.)$

ઉદાહરણ - 14 બે ચલ x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક 0.8 છે તો 15 અવલોકનો માટે સંભવિત દોષ (P.E.) તથા સમષ્ટિ સહસંબંધાંકની સીમા શોધો.

જવાબ : અહીં $r = 0.8$, $n = 15$ આપેલ છે.

સંભવિત દોષ = $P.E._r = 0.6745\left(\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}\right)$

$$P.E._r = 0.6745\left(\frac{1-(0.8)^2}{\sqrt{15}}\right) = 0.06274$$

સમષ્ટિ સહસંબંધાંકની સીમા

$= (r - P.E._r,\ r + P.E._r)$

$= (0.8 - 0.06274,\ 0.8 + 0.06274)$

$= (0.73726,\ 0.86274)$

ઉદાહરણ - 15 બે ચલ x અને y ના 15 અવલોકનો સંભવિત દોષ 0.063 છે તો સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

જવાબ : અહીં $n = 15$, $P.E._r = 0.063$ આપેલ છે.

સંભવિત દોષ $P.E._r = 0.6745\left(\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}\right)$

$$0.063 = 0.6745\left(\frac{1-(r)^2}{\sqrt{15}}\right)$$

$$1 - r^2 = \frac{0.063}{0.6745}\sqrt{15}$$

$$1 - r^2 = 0.3617$$

$$\therefore r^2 = 1 - 0.3617$$

$$\therefore r^2 = 0.6382$$

$$\therefore r = 0.7989$$

સ્વાધ્યાય

(1) સૈદ્ધાંતિક પ્રશ્નો

1. સહસંબંધનો અર્થ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
2. સહસંબંધ અને સહસંબંધાંક એટલે શું ? ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.
3. સહસંબંધના પ્રકાર વર્ણવો.
4. સહસંબંધાંકના ગુણધર્મો વર્ણવો.
5. સહસંબંધનો ઉપયોગ ક્યારે થાય છે ?
6. કાર્ય-કારણનો સંબંધ સમજાવો.
7. સંભવિત દોષનો અર્થ અને તેનું અર્થઘટન સમજાવો.

(2) ટૂંકનોંધ લખો.

1. વિકીર્ણ આકૃતિની રીત
2. સહસંબંધના પ્રકારો
3. કાર્લ પિયર્સનની રીત
4. સ્પિયરમેનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીત
5. સંભવિત દોષ

(3) બહુ વિકલ્પ પ્રશ્નો :

નીચે આપેલા બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો.

1. વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખ પર આવેલા હોય તો rની કિંમત .... થાય.

   (a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) −1 અથવા 1

2. સહસંબંધાંક r નો વિસ્તાર .... છે.

   (a) $-1 < r < 1$ (b) $0 < r < 1$ (c) $-1 \le r \le 1$ (d) $0.5 < r$

3. નીચેના પૈકી r ની કઈ કિંમત શક્ય નથી ?

   (a) 0.99 (b) 1.07 (c) −0.99 (d) 0.75

4. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં બે ચલોના ક્રમાંકોના તફાવતોનો સરવાળો .... થાય.

   (a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) 0.5

5. જો $\sum d^2 = 0$ હોય તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની કિંમત .... થાય.

   (a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) 0.25

6. જો r (x, y) = 0.7 હોય તો r (x + 0.2, y + 0.2) = ...

   (a) 0.7 (b) 0.5 (c) 0.9 (d) 1

7. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં જો બે ચલોના ક્રમ એક બીજાથી ઊલટા ક્રમમાં હોય તો r = ... થાય.

   (a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) 0.25

8. જો બે ચલ વચ્ચે અચળ પ્રમાણમાં એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થતા હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે .... પ્રકારનો સહસંબંધ મળે.

   (a) સંપૂર્ણ ઋણ (b) સંપૂર્ણ ધન (c) આંશિક ઋણ (d) આંશિક ધન

9. જો $\sum d^2 = 127$ અને n = 100 હોય તો r = ...

   (a) 0.20 (b) 0.23 (c) 0.26 (d) 0.30

10. CF (Correction Factor) શોધવા માટે પ્રત્યેક પુનરાવર્તન પામતા અવલોકનના સમૂહ દીઠ .... પદ $\sum d^2$ માં ઉમેરવામાં આવે છે.

(a) $m^3 - m$ (b) $\frac{m^3 - m}{12}$ (c) $m^3 + m$ (d) $\frac{m^3 + m}{12}$

જવાબ : 1. (d) 2. (c) 3. (b) 4. (b) 5. (c) 6. (a) 7. (c) 8. (a) 9. (b) 10. (b)

(4) નીચે આપેલા શબ્દોનો એક લીટીમાં અર્થ સમજાવો.

(1) સહસંબંધ

(2) ધન સહસંબંધ

(3) ઋણ સહસંબંધ

(4) વિકીર્ણ આકૃતિ

(5) સહસંબંધાંક

(6) સંભવિત દોષ

(5) ટૂંકા પ્રશ્નો

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો.

1. સહસંબંધની વ્યાખ્યા આપો.
2. સહસંબંધાંકની વ્યાખ્યા આપો.
3. વિકીર્ણ આકૃતિની મુખ્ય મર્યાદા શું છે ?
4. કાર્લ પિયર્સનની રીતની મુખ્ય મર્યાદા શું છે ?
5. જો સહવિચલનનું મૂલ્ય ઋણ હોય તો સહસંબંધાંકની કિંમત ધન થશે કે ઋણ ?
6. x અને y વચ્ચે સહસંબંધાંક 0.6 છે. હવે xના પ્રત્યેક અવલોકનમાં 10 ઉમેરવામાં આવે અને yના પ્રત્યેક અવલોકનોમાંથી 10 બાદ કરવામાં આવે તો આ ફેરફાર બાદ સહસંબંધાંક શું થશે ?

   [જવાબ : r = 0.6]
7. જો $\sum\left(R_x - R_y\right)^2 = 126$ અને n = 8 તો ક્રમાંક સહસંબંધાંક ની કિંમત મેળવો.

   [જવાબ : r = -0.5]
8. ક્રૂડ ઓઈલની વાર્ષિક આયાત અને તે જ સમયગાળામાં થતા લગ્નોની સંખ્યા વચ્ચેના સહસંબંધ વિશે શું કહી શકાય ?

(6) વ્યવહારિક દાખલાઓ.

1. આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

x	0.21	0.20	0.24	0.23	0.25	0.26	0.28	0.30
y	1200	1500	1600	1900	1700	1800	2000	2100

[જવાબ : r = 0.8374]

2. આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

(1)

X	2	9	8	5	9	7	5
Y	9	5	7	5	3	4	4

[જવાબ : r = -0.59339]

(2)

X	15	12	18	19	16	18	12
Y	22	29	25	30	28	29	19

[જવાબ : r = 0.502108]

(3)

X	0.22	0.29	0.3	0.33	0.35	0.39	0.43
Y	0.94	0.89	0.84	0.8	0.79	0.75	0.71

[જવાબ : r = -0.98355]

(4)

X	0.29	0.22	0.2	0.18	0.15	0.14	0.11
Y	112	114	118	119	121	124	129

[જવાબ : r = -0.94744]

(5)

X	112	115	128	130	134	139	145
Y	51	52	59	59	62	63	69

[જવાબ : r = 0.989054]

3. નીચેના કોષ્ટકમાં પરીક્ષાનું પરિણામ આપેલ છે. આપેલ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીની ઉંમર તથા નાપાસના ટકાવારીનો સહસંબંધાંક શોધો.

વિદ્યાર્થીની ઉંમર	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21
નાપાસના %	39	40	43	43	36	39	48	44

[જવાબ : r = 0.4754]

4. આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

વેચાણ	100	200	300	400	500	600	700
વિજ્ઞાપનનો ખર્ચ	19	21	25	29	36	49	56

[જવાબ : r = 0.9663]

5. આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

$$\sum x = 200,\ \sum x^2 = 4360, \sum y = 250, \sum y^2 = 6810, \sum xy = 5384, n = 10$$

[જવાબ : r = 0.8552]

6. આપેલ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

$\bar{x} = 50, \bar{y} = 60,$

$$\sum xy = 48256, \sum(x-40) = \sum(y-50) = 160, \sum(x-45)^2 = 656, \sum(y-64)^2 = 1280$$

[જવાબ : r = 0.4967]

7. સમષ્ટિના સહસંબંધાંકની સીમા 0.375 અને 0.625 નિદર્શો પરથી મેળવેલ છે તો તે પરથી સહસંબંધાંક તથા નિદર્શનું સંખ્યા શોધો.

[જવાબ : r = 0.5, n = 16]

8. આપેલ દ્વિચલ કોષ્ટક ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

X → Y ↓	90-100	100-100	110-120	120-130
50-55	4	7	6	2
55-60	6	10	7	4
60-65	6	12	10	7
65-70	3	8	6	3

[જવાબ : r = 0.068]

9. આપેલ દ્વિચલ કોષ્ટક ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

X → Y↓	125	115	105	95
50-55	2	6	7	4
55-60	4	7	10	6
60-65	7	10	12	6
65-70	3	6	8	3

[જવાબ : r = 0.0655]

10. આપેલ દ્વિચલ કોષ્ટક ઉપરથી કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક શોધો.

X → Y↓	80-100	60-80	40-60	20-40	0-20
0-50	2	4	7	-	-
50-100	-	6	14	8	-
100-150	-	1	8	12	3
150-200	-	-	20	6	3
200-250	-	-	-	5	1

[જવાબ : r = 0.46]

11. આપેલ માહિતી પરથી સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

x	9	16	14	15	12	10	20
y	11	15	19	16	9	11	12

[જવાબ : r = 0.5179]

12. આપેલ માહિતી પરથી સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

x	45	59	62	45	59	59	61	67
y	18	20	25	16	18	17	18	20

[જવાબ : r = 0.6547]

13. આપેલ માહિતી પરથી સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

R_1	6	7	1	4	5	3	2	8
R_2	8	6	5	3	2	1	4	7

[જવાબ : r = 0.5238]

14. આપેલ માહિતી પરથી સ્પિયરમેનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

x	110	115	116	117	115	109	118
y	154	155	159	160	155	148	165

[જવાબ : r = 1]

15. આપેલ માહિતી પરથી સ્પિયરમેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

R_1	9	8	7	5	3	2	1	4	6	10
R_2	8	10	6	3	4	1	2	5	7	9

[જવાબ : r = 0.903]

એકમ
3

નિયત સંબંધ પૃથક્કરણ

3.1 પ્રસ્તાવના :

આપણે પ્રકરણ 2માં જોઈ ગયા કે એક ચલમાં ફેરફાર થાય એની સાથે બીજા ચલમાં પણ ફેરફાર થતો હોય તથા બંને ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય. આમ સહસંબંધાંક દ્વારા બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ ધન છે કે ઋણ છે તે જાણી શકાય છે. પરંતુ એક ચલમાં થતા ફેરફારની અસર બીજા ચલ ઉપર કેટલી થાય છે તેનો ખ્યાલ સહસંબંધાંકથી મળી શકતો નથી. દા.ત. વ્યક્તિની ઊંચાઈમાં અમુક સે.મી.વધારો થતાં તેના વજનમાં કેટલો વધારો થશે ? તે જ રીતે એક ચલની આપેલી કિંમત માટે બીજા ચલની કેટલી અનુમાનિત કિંમત થશે ? આ માહિતી માત્ર સહસંબંધના અભ્યાસથી જાણી શકાતી નથી. પરંતુ તે જાણવા માટે નિયત સંબંધની રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

3.2 નિયત સંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા :

નિયત સંબંધ (Regression) શબ્દનો સૌ પ્રથમ ઉપયોગ ફ્રાન્સિસ ગેલ્ટોને 19મી સદીના અંતમાં કર્યો હતો.

નિયત સંબંધનો શાબ્દિક અર્થ ''પ્રતિ ગમન'' અથવા ''સરેરાશ કિંમત તરફ પરત આવવું'' એવો થાય છે.

જો બે સંબંધિત ચલ વચ્ચે લગભગ સંપૂર્ણ સહસંબંધ હોય તો વિકીર્ણ આકૃતિ પરના બિંદુઓ સીધી રેખા કે વક્ર રેખાની આજુબાજુ નજીકમાં પડેલા હોય છે. આ સીધી રેખા કે વક્ર રેખા બે ચલ વચ્ચેના સંબંધનું લગભગ ગણિતીય સ્વરૂપ દર્શાવે છે. આમ નિયત સંબંધ એટલે ''બે ચલ વચ્ચેના સંબંધનું લગભગ ગણિતીય સ્વરૂપ.''

નિયત સંબંધના અભ્યાસથી એક ચલની કિંમતમાં થતા ફેરફારથી બીજા ચલની કિંમતમાં શું ફેરફાર થશે અથવા તેની કેટલી અસર થશે તે જાણી શકાય છે. તે માટે નિયત સંબંધ સમીકરણનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. નિયત સંબંધ સમીકરણો દ્વારા એક ચલની આપેલી કિંમત માટે તેને સંબંધિત બીજા ચલની કિંમતનું આગણન કરી શકાય છે.

હવે આપણે બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે એવી પૂર્વધારણા લઈ તે ચલો વચ્ચેના નિયત સંબંધનો અભ્યાસ કરીશું.

3.3 સુરેખ નિયત સંબંધ મોડેલ

બે ચલ વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ હોય તે સંબંધ દર્શાવતા ગણિતીય મોડેલને નિયત સંબંધ મોડેલ કહે છે.

સામાન્ય રીતે કાર્યકારણનો સંબંધ ધરાવતા ચલમાં ''કારણ'' સ્વરૂપ ચલને x વડે દર્શાવાય છે, જેને સ્વતંત્ર અથવા નિરપેક્ષ અથવા કારણભૂત ચલ કહેવાય છે. જ્યારે કાર્ય-સ્વરૂપ ચલને y વડે દર્શાવાય છે, જેને આધારિત અથવા સાપેક્ષ અથવા અસરયુક્ત ચલ કહેવાય છે.

દા.ત. કોઈ પણ વ્યક્તિની 'આવક' અને 'ખર્ચ' વચ્ચેના સંબંધમાં સામાન્ય રીતે 'આવક' વધે (કે ઘટે) તેને કારણે 'ખર્ચ' પણ 'વધે' (કે ઘટે) છે. તેથી આપણે 'આવક' ને સ્વતંત્ર ચલ x તરીકે અને 'ખર્ચ' ને આધારિત ચલ y વડે દર્શાવી શકાય.

નિયત સંબંધ મોડેલમાં આધારિત ચલ yને સ્વતંત્ર ચલ xના ગાણિતિક વિધેય દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે.

આ સુરેખ નિયત સંબંધ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

$$y = a + bx + e$$

જ્યાં y = આધારિત અથવા સાપેક્ષ ચલ

x = સ્વતંત્ર અથવા નિરપેક્ષ ચલ

a = અચળ કિંમત

b = અચળ કિંમત

e = મોડેલનો વિક્ષેપ ચલ

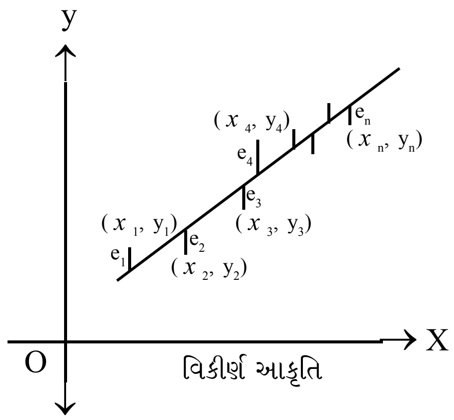
અહીં e એ બે ચલ x અને y વચ્ચે સુરેખ સંબંધની અપૂર્ણતા દર્શાવે છે. ગણિતમાં સંપૂર્ણ સુરેખ સંબંધ શક્ય છે. તેથી આ કિસ્સામાં $e = 0$ થશે. એટલે કે જો બે ચલ x અને y વચ્ચે સંપૂર્ણ સહસંબંધ હોય તો નિયત સંબંધ મોડેલ $y = a + bx$ થાય. પરંતુ વ્યવહારમાં બે ચલ વચ્ચે સામાન્ય રીતે સંપૂર્ણ સહસંબંધ જોવા મળતો નથી કારણ કે, સહસંબંધિત ચલો પર અન્ય પરિબળોની અસર પણ થતી હોય છે. તેથી જ્યારે બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ સહસંબંધ ન હોય ત્યારે નિયત સંબંધ મોડેલનું સ્વરૂપ $y = a + bx + e$ થશે.

આ મોડેલ પરથી નિયત સંબંધને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

વ્યાખ્યા : ''બે સહસંબંધિત ચલો વચ્ચેના ગાણિતિક સુરેખ સંબંધ કે જેના દ્વારા સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) ચલની કોઈ આપેલી કિંમત માટે તેને અનુરૂપ આધારિત (સાપેક્ષ) ચલની કિંમતનું અનુમાન થઈ શકે તેને સુરેખ નિયત સંબંધ કહે છે.''

3.4 નિયત સંબંધ રેખાના અન્વાયોજન માટેની ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત :

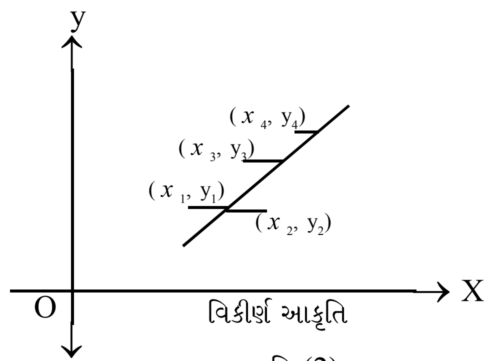
ધારો કે બે સહસંબંધિત ચલો x (સ્વતંત્ર) અને y (આધારિત) ચલના અવલોકનોની n ક્રમિત જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n)$ મેળવેલ છે. આપેલ n અવલોકનોને વિકીર્ણ આકૃતિમાં દર્શાવો. જો બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ હોય તો વિકીર્ણ આકૃતિ પરના બિંદુઓ કોઈ એક સુરેખની આજુબાજુ નજીકમાં પડેલા હોય છે. (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ)



આકૃતિ (1)

હવે આ બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા એવી રીતે દોરીએ કે જેથી બિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) અને તે રેખા વચ્ચેના લંબઅંતરોનો વર્ગનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થાય. તો તે રેખાને શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજન રેખા (Line of best fit) કહેવામાં આવે છે.

આ રેખા બે ચલ વચ્ચેનો શ્રેષ્ઠ સુરેખ સંબંધ રજૂ કરે છે. આ રેખા દોરવાની રીત 'ન્યુનતમ વર્ગની રીત'થી ઓળખાય છે. શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજન રેખા બે રીતે દોરી શકાય છે. આકૃતિ-1 મુજબ જો બિંદુઓ અને અન્વાયોજન રેખા વચ્ચેના y ધરીને સમાંતર લંબ અંતરોનો વર્ગનો સરવાળો ન્યૂનતમ થાય તે રીતે અન્વાયોજન રેખા દોરીએ તો તેથી મળતી શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજન રેખાને yની x પરની નિયત સંબંધ રેખા કહેવામાં આવે છે. $(y = a + bx)$



આકૃતિ (2)

આકૃતિ - 2 મુજબ જો બિંદુઓ અને અન્વાયોજન રેખા વચ્ચેના x - ધરીને સમાંતર લંબ અંતરોનો વર્ગનો સરવાળો ન્યૂનતમ થાય તે રીતે અન્વાયોજન રેખા દોરીએ તો તેથી મળતી શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજન રેખાને xની y પરની નિયત સંબંધ રેખા કહેવામાં આવે છે. $(x = a + by)$

(1) yની x પરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ

ગાણિતિક સમજૂતી : જો x અને y વચ્ચેના સુરેખ નિયત સંબંધને દર્શાવતી અન્વાયોજન રેખાનું સમીકરણ $y = a + bx$ હોય તો આ રેખાના અચળાંક a અને b ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

ધારો કે ચલ $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ કિંમતોને અનુરૂપ ચલ yની રેખા પરથી મેળવેલ અવલોકિત કિંમતો $y_1, y_2, \dots y_n$ છે અને ચલ y ની અનુમાનિત કિંમતો $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots \hat{y}_n$ છે. હવે xની કોઈ કિંમત $x = x_i$ને અનુરૂપ yની અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}_i = a + bx_i$ થશે.

ચલ yની અવલોકિત કિંમત y_i અને અનુમાનિત કિંમત $\hat{y}_2$ વચ્ચેના ઊભા અંતરને અનુમાનની ત્રુટી (error) e_i કહે છે.

$$\therefore e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i) = y_i - a - bx_i$$

જ્યાં $i = 1, 2, 3, \dots\dots n$

અહીં નિયત સંબંધ રેખા $y = a + bx$ માં રહેલા અચળાંકો a અને b ની કિંમતો એવી રીતે મેળવવામાં આવે છે કે જેથી ત્રુટી (e_i) ના વર્ગોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થાય. એટલે કે $\Sigma e_i^2 = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma(y_i - a - bx_i)^2$ ન્યૂનતમ થાય.

સમીકરણ $\sum e_i^2 = \sum (y_i - a - bx_i)$ નું આંશિક વિકલન કરી નીચે મુજબના સમીકરણ મેળવી શકાય.

$\sum y = na + b\sum x$ ....(i)

$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$ ....(ii)

સમીકરણ (i) અને (ii) ઉકેલતા આપણને a અને bની કિંમત નીચે મુજબ મળશે.

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

તથા $a = \frac{\sum y}{n} - b\frac{\sum x}{n}$

$a = \overline{y} - b\overline{x}$

આ રીતથી મળતી b ની કિંમતને y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનો નિયત સંબંધાંક કહે છે અને તેને b_{yx} વડે દર્શાવાય છે. અચળાંક ‘a’ને નિયત સંબંધ રેખાનો અંતઃખંડ કહે છે.

આ રીતે મેળવેલી રેખા $\hat{y} = a + bx$, વિકીર્ણ આકૃતિના બધાં જ બિંદુઓની શક્ય તેટલી નજીકથી પસાર થતી રેખા છે. આ રેખાને yની x પરની નિયત સંબંધ રેખા કહેવામાં આવે છે.

અહીં નિયત સંબંધ રેખા મેળવતી વખતે ત્રુટીઓના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ કરવામાં આવે છે. તેથી આ રીતને ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત કહે છે.

(2) xની y પરના નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

જો yને સ્વતંત્ર ચલ અને xને આધારિત ચલ તરીકે લઈ (આકૃતિ-2 મુજબ) ન્યૂનતમ વર્ગોનો સિદ્ધાંત વાપરવામાં આવે તો xની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ

$\hat{x} = a + by$ થશે.

જ્યાં

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum y^2 - (\sum y)^2}$$

અને $a = \overline{x} - b\overline{y}$ થશે.

આ રીતથી મળતી bની કિંમત ને xની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનો નિયત સંબંધાંક કહે છે અને તેને b_{xy} વડે દર્શાવાય છે. અચળાંક ‘a’ને નિયત સંબંધ રેખાનો અંતઃખંડ (intercept) કહે છે.

3.5 નિયત સંબંધ સમીકરણો, નિયત સંબંધાંક :

નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણોમાં બે અચળાંક a અને bની કિંમતો શોધવા માટે આપણે ન્યૂનતમ વર્ગની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. આપણે બે નિયત સંબંધ સમીકરણોમાં અચળાંક a અને bની કિંમત નીચે મુજબના અલગ અલગ સૂત્ર પરથી પણ મેળવી શકાય.

(1) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ :

y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ નીચે મુજબ છે.

$y = a + bx$

જ્યાં $b = b_{yx}$ = y નો x પરનો નિયત સંબંધાંક છે.

અહીં b_{yx}, xમાં એકમ ફેરફાર કરવાથી yમાં થતો ફેરફાર દર્શાવે છે.

હવે, $b_{yx} = r\frac{S_y}{S_x}$

જ્યાં r = ચલ x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક

S_x = ચલ xનું પ્રમાણિત વિચલન

S_y = ચલ yનું પ્રમાણિત વિચલન

→ જ્યારે x અને yના અવલોકનોની કિંમત નાની હોય ત્યારે $\sum x, \sum y, \sum xy, \sum x^2$ ની કિંમત મેળવી નીચેના સૂત્રમાં મૂકી b_{yx}ની કિંમત મેળવવી સરળ પડે છે.

$$b_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

→ જ્યારે x અને y ના અવલોકનોની કિંમત મોટી હોય અને $\overline{x}$ અને $\overline{y}$ ની પૂર્ણાંક કિંમત હોય ત્યારે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી b_{yx}ની કિંમત મેળવવી સરળ પડે છે.

$$b_{yx} = \frac{\sum\left(x-\overline{x}\right)\left(y-\overline{y}\right)}{\sum\left(x-\overline{x}\right)^2}$$

→ જ્યારે x અને y ના અવલોકનોની કિંમત મોટી હોય અને $\overline{x}$ અથવા $\overline{y}$ અપૂર્ણાંક કિંમત હોય ત્યારે ધારેલા મધ્યકમાંથી વિચલનો લઈને નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી b_{yx}ની કિંમત મેળવવી સરળ પડે છે.

$$b_{yx} = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{n\sum d_x^2 - \left(\sum d_x\right)^2}$$

→ જો માહિતી દ્વિચલ કોષ્ટકમાં આપવામાં આવી હોય તો b_{yx}ની કિંમત નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ મેળવી શકાય.

$$b_{yx} = \frac{n\sum fd_x d_y - \sum f_x d_x \sum f_y d_y}{n\sum f_x d_x^2 - \left(\sum f_x d_x\right)^2}\left(\frac{C_y}{C_x}\right)$$

જ્યાં $d_x = \frac{x-A}{C_x}, d_y = \frac{y-B}{C_y}$

અચળાંક ‘a’ ની કિંમત $a = \overline{y} - b\overline{x}$ વડે મેળવી શકાય.

(2) x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ :

x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ નીચે મુજબ છે.

x = a + by

જ્યાં b = b_{xy} = x નો y પરનો નિયત સંબંધાંક છે.

અહીં b_{xy}, yમાં એકમ ફેરફાર કરવાથી xમાં થતો ફેરફાર દર્શાવે છે.

હવે $b_{xy} = r\frac{S_x}{S_y}$ છે.

ઉપરોક્ત વર્ણન કર્યા મુજબ b_{xy}ની કિંમત નીચે મુજબના સૂત્રો ઉપરથી મેળવી શકાય.

$$b_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum y^2 - (\sum y)^2}$$

$$b_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(y-\bar{y})^2}$$

$$b_{xy} = \frac{n\sum d_x d_y - (\sum d_x)(\sum d_y)}{n\sum d_y^2 - (\sum d_y)^2}$$

દ્વિચલ માહિતી માટે b_{xy} નું સૂત્ર નીચે મુજબ છે.

$$b_{xy} = \frac{n\sum fd_x d_y - (\sum f_x d_x)(\sum f_y d_y)}{n\sum f_y d_y^2 - (\sum f_y d_y)^2} \times \left(\frac{C_x}{C_y}\right)$$

અચળાંક 'a'ની કિંમત $a = \bar{x} - b\bar{y}$ વડે મેળવી શકાય.

નિયત સંબંધના અન્ય જરૂરી સૂત્રો

(1) yની x પરની નિયત સંબંધ રેખાના સૂત્રો :

$$b_{yx} = \frac{Cov.(x,y)}{Sx^2}$$

$$b_{yx} = \frac{\sum xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x^2 - n(\bar{x})^2} \text{ અને } a = \bar{y} - b\bar{x}$$

(2) xની y પરની નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણનાં સૂત્રો :

$$b_{xy} = \frac{\sum xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum y^2 - n(\bar{y})^2}; \quad b_{xy} = \frac{Cov.(x.y)}{S_y^{\ 2}} \text{ અને } a = \bar{x} - \overline{by}$$

3.6 નિયત સંબંધાંકના ગુણધર્મ

1. સહસંબંધાંક r, નિયત સંબંધાંક b_{xy} અને b_{yx}ના ચિહ્નો સમાન હોય છે.
2. બે નિયત સંબંધાંકો ઉગમબિંદુ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) છે. પરંતુ સ્કેલમાપ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) નથી.
3. બે નિયત સંબંધાંકોમાંથી કોઈ પણ એકની કિંમત 1 કરતાં ઓછી હોવી જોઈએ અને બીજો એક કરતા વધુ હોઈ શકે પરંતુ બંનેનો ગુણાકાર 1 કરતા ક્યારેય મોટો ન હોઈ શકે.
4. બે નિયત સંબંધાંકોનો ગુણાકાર સહસંબંધાંકના વર્ગ જેટલો થાય છે.

   $$\therefore r^2 = b_{xy} \cdot b_{yx}$$

   $$r = \pm\sqrt{b_{xy}\, b_{yx}}$$

   આમ, સહસંબંધાંક, નિયત સંબંધાંકોનો ગુણોત્તર મધ્યક છે.
5. જો બન્ને ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ સહસંબંધ હોય તો નિયત સંબંધાંકો એક બીજાના વ્યસ્ત હોય છે. સંપૂર્ણ સહસંબંધ એટલે કે r = 1 અથવા r = –1

$\therefore r^2 = 1$

$$\therefore 1 = b_{xy} \cdot b_{yx} \Rightarrow b_{xy} = \frac{1}{b_{yx}}$$

3.7 નિયત સંબંધ રેખાના ગુણધર્મ

(1) જો બે નિયત સંબંધ રેખા એક બીજાને લંબ હોય તો $r = 0$ થાય.

(2) જો બે નિયત સંબંધ રેખા એકાકાર હોય તો $r = \pm 1$ થાય.

(3) બે નિયત સંબંધ રેખા એક બીજા ને $(\overline{x}, \overline{y})$ યામમાં છેદે છે.

(4) જેમ નિયત સંબંધ રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો મોટો તેમ બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ ઓછો અને જેમ ખૂણો નાનો તેમ સહસંબંધ વધુ. આમ, નિયત સંબંધ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાઓ સંબંધાકનું માપ પૂરું પાડે છે.

3.8 નિયત સંબંધના અભ્યાસની ઉપયોગિતા :

નિયત સંબંધ બે ચલ વચ્ચે ગાણિતિક વિધેય દ્વારા રજૂ કરાતો સંબંધ છે. તેની ઉપયોગિતા નીચે મુજબ છે.

(1) બે સહસંબંધિત ચલો વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ જાણી શકાય છે.

(2) બે ચલો વચ્ચે ગાણિતિક સંબંધ પ્રસ્થાપિત થઈ જાય પછી સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) ચલ x (અથવા y)ની જ્ઞાત કિંમત પરથી આધારિત (સાપેક્ષ) ચલ y (અથવા x)ની અજ્ઞાત કિંમતનું અનુમાન મેળવી શકાય છે.

(3) એક ચલની કિંમતમાં થતાં એકમ ફેરફારની અસર બીજા ચલની કિંમત ઉપર કેટલી થાય છે તે જાણી શકીએ છીએ.

(4) નિયત સંબંધ દ્વારા મળતી અંદાજીત કિંમતમાં થતી ભૂલનું (ત્રુટીનું) પ્રમાણ જાણી શકાય છે.

3.9 સહસંબંધ અને નિયત સંબંધ વચ્ચેનો તફાવત

બે ચલ વચ્ચેના સંબંધના સંપૂર્ણ અભ્યાસ માટે સહસંબંધ અને નિયત સંબંધનો અભ્યાસ જરૂરી છે તેમના વચ્ચેના તફાવતો નીચે પ્રમાણે છે.

1. સહસંબંધાંક બે ચલ વચ્ચેના સંબંધની નિકટતા તેમજ તેનો પ્રકાર દર્શાવતું સંખ્યાત્મક માપ છે.

   નિયત સંબંધ દ્વારા એક ચલની કિંમતને અનુરૂપ બીજા ચલની કિંમતનું આગણન કરવામાં આવે છે.

2. બે ચલ વચ્ચેનો સહસંબંધ 1 કરતાં વધુ હોય શકે નહીં. નિયત સંબંધાંક બે હોય છે. બે નિયત સંબંધાંકનો ગુણાકાર 1 કરતાં વધુ હોઈ શકે નહીં. નિયત સંબંધાંકની કિંમત એક કરતાં વધુ હોય શકે છે.

3. સહસંબંધાંકની કિંમત સ્કેલ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે. નિયત સંબંધાંકની કિંમત સ્કેલ પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી.

4. બે નિયત સંબંધાંકો ઉપરથી સહસંબંધાંક મેળવી શકાય છે. ફક્ત સહસંબંધાંક ઉપરથી નિયત સંબંધાંકો મેળવી શકાતા નથી.

ઉદાહરણ - 1 નીચેની માહિતી ઉપરથી યોગ્ય નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

કારની ઉંમર (વર્ષ)	2	4	6	8	10
રખરખાવ ખર્ચ ('00રૂા.)	1	2	2.5	3	4

જવાબ :

	કારની ઉંમર(x)	**રખરખાવ ખર્ચ (y)**	x^2	**xy**
	2	1	4	2
	4	2	16	8
	6	2.5	36	15
	8	3	64	24
	10	4	100	40
કુલ	30	12.5	220	89

y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx

$$b_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

$$= \frac{5(89) - (30)(12.5)}{5(220) - (30)^2}$$

$$= \frac{445 - 375}{1100 - 900}$$

$$b_{xy} = \frac{70}{200} = 0.35$$

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\overline{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{12.5}{5} = 2.5$$

ઉપરોક્ત કિંમતો $a = \overline{y} - b\overline{x}$ માં મૂકતાં,

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

$$a = (2.5) - (0.35)(6)$$

$$a = 2.5 - 2.1 = 0.4$$

$\therefore$ y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા y = 0.4 + 0.35 x. થશે.

ઉદાહરણ - 2 નીચેની માહિતીમાંથી યોગ્ય નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

સ્વતંત્ર ચલ (x)	2	4	5	6	8	11
આધારિત ચલ (y)	18	12	10	8	7	5

જવાબ :

	x	**y**	x^2	**xy**
	2	18	4	36
	4	12	16	48
	5	10	25	50
	6	8	36	48
	8	7	64	56
	11	5	121	55
કુલ	36	60	266	293

y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

$$b_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b_{yx} = \frac{6(293) - (36)(60)}{6(266) - (36)^2}$$

$$b_{yx} = \frac{1758 - 2160}{1596 - 1296} = -\frac{402}{300} = -1.34$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{60}{6} = 10$$

ઉપરોક્ત કિંમતો $a = \bar{y} - b\bar{x}$ માં મૂકતાં,

a = 10 − (−1.34) (6)

a = 10 + 8.04 = 18.04

$\therefore$ y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 18.04 - 1.34x થશે.

ઉદાહરણ - 3 નીચેની માહિતી પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણ શોધો તે ઉપરાંત

(1) નિયત સંબંધાંકની કિંમતનો ઉપયોગ કરી સહસંબંધાંકની કિંમત મેળવો.

(2) જ્યારે અર્થશાસ્ત્રના ગુણ 30 હોય ત્યારે આંકડાશાસ્ત્રના ગુણનું અનુમાન કરો.

અર્થશાસ્ત્ર (x)	25	28	35	32	31	36	29	38	34	32
આંકડાશાસ્ત્ર(y)	43	46	49	41	36	32	31	30	33	39

જવાબ :

x	y	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
25	43	-7	49	5	25	-35
28	46	-4	16	8	64	-32
35	49	3	9	11	121	33
32	41	0	0	3	9	0
31	36	-1	1	-2	4	2
36	32	4	16	-6	36	-24
29	31	-3	9	-7	49	21
38	30	6	36	-8	64	-48
34	33	2	4	-5	25	-10
32	39	0	0	1	1	0
કુલ 320	380	0	140	0	398	-93

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{320}{10} = 32 \qquad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{380}{10} = 38$$

(1) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

$$b_{yx} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{-93}{140}$$

= - 0.664

ઉપરોક્ત કિંમતો a = $\bar{y} - b\bar{x}$ માં મૂકતાં,

a = 38 - (-0.664) (32)

a = 38 + 21.12

a = 59.12

$\therefore$ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 59.12 – 0.664x થશે.

(2) x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ x = a + by થશે.

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$$

$$b_{xy} = \frac{-93}{398}$$

b_{xy} = -0.23

$a = \bar{x} - b\bar{y}$ માં મૂકતાં ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ

$$a = 32 - (-0.23)(38)$$

a = 40.74

$\therefore$ x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ x = 40.74 – 0.23y થશે.

(3) હવે $r = \pm\sqrt{b_{xy} b_{yx}}$

$= -\sqrt{(-0.664)(-0.23)}$

= – 0.39

(4) જ્યારે x = 30 (અર્થશાસ્ત્રના ગુણ) હોય ત્યારે, આ કિંમત y = 59.12 – 0.664xમાં મૂકતાં

y = 59.12 – 0.664 (30)

y = 39

આંકડાશાસ્ત્રના 39 ગુણ થશે.

ઉદાહરણ - 4. નીચેની માહિતી પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણ શોધો.

x	28	41	40	38	35	33	46	32	36	33
y	30	34	31	34	30	26	28	31	26	31

જવાબ :

	x	y	d_x	d_y	d_x^2	d_y^2	$d_x d_y$
	28	30	-8	0	64	0	0
	41	34	5	4	25	16	20
	40	31	4	1	16	1	4
	38	34	2	4	4	16	8
	35	30	-1	0	1	0	0
	33	26	-3	-4	9	16	12
	46	28	10	-2	100	4	-20
	32	31	-4	1	16	1	-4
	36	26	0	-4	0	16	0
	33	31	-3	1	9	1	-3
કુલ	362	301	2	1	244	71	17

(1) y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ y = a + bx છે.

$$b_{yx} = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{n\sum d_x^2 - \left(\sum d_x\right)^2}$$

$$= \frac{10(17)-(2)(1)}{10(244)-(2)^2}$$

$$= \frac{168}{2436} = 0.07$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{362}{10} = 36.2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{301}{10} = 30.1$$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a = \bar{y} - b\bar{x}$ માં મૂકતાં

a = (30.1) – (0.07) (36.2) = 27.56

$\therefore$ y ની *x* ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 27.56 + 0.07 x થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ x = a + by છે.

$$b_{xy} = \frac{n\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{n\sum d_y^2 - \left(\sum d_y\right)^2}$$

$$= \frac{10(17)-(2)(1)}{10(71)-(1)^2}$$

$$= \frac{168}{709}$$

= 0.2369

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a = \bar{x} - b\bar{y}$ માં મૂકતાં,

a = (36.2) – (0.2369) (30.1)

$a = 29.07$

$\therefore$ x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખા સમીકરણ x = 29.07 + 0.2369 y થશે.

ઉદાહરણ - 5 નીચેના દ્વિચલ કોષ્ટક પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાનાં સમીકરણ મેળવો. તથા તેના પરથી સહસંબંધાંક મેળવો.

	વિજ્ઞાપનનો ખર્ચ			
વેચાણની આવક	5 - 15	15 -25	25 - 35	35 - 45
75 - 125	4	1	-	-
125 - 175	7	6	2	1
175 - 225	1	3	4	2
225 - 275	1	1	3	4

જવાબ :

વિજ્ઞાપનનો ખર્ચ

વેચાણની આવક		5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45				
	d_y ↓ d_x →	−1	0	1	2	f_y	$f_y d_y$	$f_y d_y^2$	$f d_x d_y$
75 - 125	−1	4 $\boxed{4}$	1 $\boxed{0}$	– $\boxed{0}$	– $\boxed{0}$	5	−5	5	4
125 - 175	0	7 $\boxed{0}$	6 $\boxed{0}$	2 $\boxed{0}$	1 $\boxed{0}$	16	0	0	0
175 - 225	1	1 $\boxed{-1}$	3 $\boxed{0}$	4 $\boxed{4}$	2 $\boxed{4}$	10	10	10	7
225 - 275	2	1 $\boxed{-2}$	1 $\boxed{0}$	3 $\boxed{6}$	4 $\boxed{16}$	9	18	36	20
કુલ	f_x	13	11	9	7	40	23	51	31
	$f_x d_x$	-13	0	9	14	10			
	$f_x d_x^2$	13	0	9	28	50			
	$f d_x d_y$	1	0	10	20	31			

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_x d_x}{n} C_x \qquad d_x = \frac{x - A}{C_x} \Rightarrow d_x = \frac{x - 20}{10}$$

$$= 20 + \frac{10}{40} 10 = 20 + 2.5 = 22.5$$

$$\bar{y} = B + \frac{\sum f_y d_y}{n} C_y \qquad d_y = \frac{y - B}{C_y} \Rightarrow d_y = \frac{y - 150}{50}$$

$$= 150 + \frac{23}{40} 50 = 150 + 28.75 = 178.75$$

(1) y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

$$b_{yx} = \frac{n\sum fd_x d_y - \sum f_x d_x \sum f_y d_y}{n\sum f_x d_x^2 - \left(\sum f_x d_x\right)^2}\left(\frac{C_y}{C_x}\right)$$

$$b_{yx} = \frac{40(31) - (10)(23)}{(40)(50) - (10)^2} \times \frac{50}{10} = \frac{1240 - 230}{2000 - 100} \times \frac{50}{10} = \frac{1010}{1900} \times \frac{50}{10} = 2.657$$

ઉપરોક્ત કિંમત સમીકરણ a $= \bar{y} - b\bar{x}$ માં મૂકતાં,

a = 178.75 – 2.657 (22.5)

a = 178.75 – 59.8

a = 118.95

$\therefore$ y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 118.95 + 2.657x થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = a+by છે.

$$b_{xy} = \frac{n\sum fd_x d_y - \sum f_x d_x \sum f_y d_y}{n\sum f_y d_y^2 - \left(\sum f_y d_y\right)^2}\left(\frac{C_x}{C_y}\right)$$

$$b_{xy} = \frac{40(31) - (10)(23)}{40(51) - (23)^2} \times \frac{10}{50} = \frac{1240 - 230}{2040 - 529} \times \frac{10}{50} = \frac{1010}{1511} \times \frac{10}{50} = 0.1336$$

ઉપરોક્ત કિંમત સમીકરણ a $= \bar{x} - b\bar{y}$ માં મૂકતાં,

a = 22.5 – (0.1336) (178.75)

a = –1.381

$\therefore$ x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = –1.381 + 0.1336y થશે.

(3) x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક :

$$r = \pm\sqrt{b_{xy} b_{yx}}$$

$$= \sqrt{(2.657)(0.1336)} = 0.596$$

ઉદાહરણ - 6 નીચેની માહિતી પરથી નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણ શોધો.

	x	y
મધ્યક	6	5
પ્રમાણિત વિચલન	5	40/3
સહસંબંધાંક	8/15	

જ્યારે x = 100 હોય ત્યારે yની કિંમતનું આગણન કરો.

જવાબ : (1) y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

જ્યાં $b_{yx} = r\frac{S_y}{S_x}$

$$b_{yx} = \frac{8}{15}\frac{40/3}{5} = \frac{8}{15}\frac{40}{15} = \frac{64}{45}$$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a = \overline{y} - b\overline{x}$ માં મૂકતાં

$$a = 5 - \left(\frac{64}{45}\right)6 = 5 - \frac{384}{45} = 5 - 8.53 = -3.53$$

$\therefore$ y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $y = -3.53 + \frac{64}{45}x$ થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = a + by છે.

જ્યાં $b_{xy} = r\frac{S_x}{S_y}$

$$b_{xy} = \frac{8}{15}\frac{5}{40/3} = \frac{8}{15}\frac{15}{40} = \frac{1}{5}$$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a = \overline{x} - b\overline{y}$ માં મૂકતાં

$$a = 6 - \frac{1}{5}(5) = 5$$

x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $x = 5 + \frac{1}{5}y$ થશે.

(3) હવે જ્યારે x = 100 હોય ત્યારે

$$y = -3.53 + \frac{64}{45}x$$

$$y = -3.53 + \frac{64}{45}(100)$$

$$y = 138.69$$

ઉદાહરણ - 7 x અને y ચલ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક 0.6 છે. તેમના મધ્યકો અનુક્રમે 10 અને 20 છે અને વિચરણ અનુક્રમે 2.25 તથા 4 છે. આ માહિતી પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણ શોધો.

જવાબ : અહીં $\bar{x}=10, \bar{y}=20, S_x^2=2.25, S_y^2=4$ તેથી $\boxed{S_x=1.5, S_y=2,}$ થાય, $r=0.6$ છે તો

(1) y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

જ્યાં $b_{yx}=r\frac{S_y}{S_x}=(0.6)\frac{2}{1.5}=0.8$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a=\bar{y}-b\bar{x}$ માં મૂકતાં

$a=20-(0.8)(10)=12$

y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 12 + 0.8x થશે.

(2) xની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = a + by છે.

જ્યાં $b_{xy}=r\frac{S_x}{S_y}=(0.6)\frac{1.5}{2}=0.45$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ $a=\bar{x}-\overline{by}$ માં મૂકતાં $a=10-0.45(20)=1$ માં મૂકતાં

x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = 1 + 0.45y થશે.

ઉદાહરણ - 8 બે નિયત સંબંધ સમીકરણ 5x – y = 22 અને 64x – 45y = 24 છે અને xનું પ્રમાણિત વિચલન 5 છે. આ માહિતી પરથી

(1) x અને y ના મધ્યક

(2) x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક

(3) yનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

જવાબ : (1) અહીં બે નિયત સંબંધ સમીકરણ આપેલ છે.

5x – y = 22 ....(i)

64x – 45y = 24 ....(ii)

સમીકરણ (i) ને 45 વડે ગુણી સમીકરણ (ii) માંથી બાદ કરતા,

225x	– 45y	= 990
64x	– 45y	= 24
–	+	–
161x		= 966

$\therefore x = 6 = \bar{x} = 6$

હવે x = 6 ની કિંમત સમીકરણ

5x - y = 22 માં મૂકતાં

5 (6) - y = 22

y = 8 $\Rightarrow$ $\bar{y}=8$ થશે.

(2) ધારો કે, 5x – y = 22 સમીકરણ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

y = – 22 + 5x (કારણ કે y = a + bx છે.)

$\therefore b_{yx}=5$

ધારો કે $64x - 45y = 24$ સમીકરણ x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ છે.

$\therefore\ 64x = 24 + 45y$

$$x = \frac{24}{64} + \frac{45}{64}y \quad (\text{કારણ કે } x = a + by \text{ છે.})$$

$$\therefore\ b_{xy} = \frac{45}{64}$$

x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક :

$$r = \pm\sqrt{b_{xy}\ b_{yx}} = \sqrt{\frac{45}{64}(5)} = 1.87 > 1$$

અહીં $r > 1$ છે તેથી આપણે ધારેલ સમીકરણ ખોટા છે.

$\therefore$ સમીકરણ $5x - y = 22$ એ x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ થશે.

$$x = \frac{22}{5} + \frac{y}{5}$$

$$\therefore b_{xy} = \frac{1}{5}$$

તેમજ સમીકરણ $64x - 45y = 24$ એ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ થશે.

$$y = -\frac{24}{45} + \frac{64}{45}x$$

$$\therefore b_{yx} = \frac{64}{45}$$

સાચો x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક :

$$r = \pm\sqrt{b_{xy} b_{yx}}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{5}\ \frac{64}{45}} = 0.53$$

(3) જ્યારે x નું પ્રમાણિત વિચલન 5 હોય ત્યારે y નું પ્રમાણિત વિચલન :

$$b_{xy} = r\frac{S_x}{S_y} \Rightarrow \quad S_y = r\frac{S_x}{b_{xy}}$$

$$S_y = \frac{0.53(5)}{1/5}$$

$\therefore\ S_y = 13.25$

ઉદાહરણ - 9 બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણો અનુક્રમે $12x - 15y + 99 = 0$ અને $60x - 27y - 321 = 0$ છે. અને xનું પ્રમાણિત વિચલન 6 હોય તો,

(1) x અને y ના મધ્યકો

(2) x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક

(3) y નું પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

જવાબ : અહીં બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણો આપેલ છે.

$12x - 15y + 99 = 0$ ....(i)

$60x - 27y - 321 = 0$ ....(ii)

સમીકરણ (i) ને 5 વડે ગુણી સમીકરણ (ii)માંથી બાદ કરતાં

$$\begin{array}{r} 60x - 75y + 495 = 0 \\ 60x - 27y - 321 = 0 \\ - \quad + \quad\quad + \quad\quad \\ \hline -48y + 816 = 0 \end{array}$$

$$y = \frac{816}{48} = 17$$

$$\bar{y} = 17$$

હવે y = 17ની કિંમત સમીકરણ $12x - 15y + 99 = 0$માં મૂકતાં,

$12x - 15(17) + 99 = 0$

$x = 13 \Rightarrow \bar{x} = 13$

(2) ધારો કે $12x - 15y + 99 = 0$ એ સમીકરણ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા છે.

$15y = 99 + 12x$

$$y = \frac{99}{15} + \frac{12}{15}x \text{ (કારણ કે } y = a + bx \text{ છે.)}$$

$$\therefore b_{yx} = \frac{12}{15}$$

ધારો કે $60x - 27y - 321 = 0$ એ સમીકરણ xની y પરની નિયત સંબંધ રેખા છે.

$$\therefore x = \frac{321}{60} + \frac{27}{60}y \text{ (કારણ કે } x = a + by \text{ છે.)}$$

$$\therefore b_{xy} = \frac{27}{60}$$

x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક :

$$r = \pm\sqrt{b_{xy}\, b_{yx}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{12}{15}\frac{27}{60}} = \sqrt{\frac{324}{900}} = 0.6$$

(3) જ્યારે x નું પ્રમાણિત વિચલન 6 હોય ત્યારે yનું પ્રમાણિત વિચલન :

$$b_{xy} = r\frac{S_x}{S_y} \Rightarrow \quad S_y = r\frac{S_x}{b_{xy}}$$

$$S_y = \frac{0.6(6)}{27/60} = 8$$

$$\therefore S_y = 8$$

ઉદાહરણ - 10 બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણો અનુક્રમે $12x - 85y = -99$ અને $60x + 27y = 321$ છે. x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

જવાબ : ધારો કે સમીકરણ $12x - 85y = -99$ એ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા છે.

$\therefore y = \frac{99}{85} + \frac{12}{85}x$ (કારણ કે y = a + bx છે.)

$\therefore b_{yx} = \frac{12}{85}$

ધારો કે સમીકરણ 60x + 27y = 321 એ x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખા છે.

$x = \frac{321}{60} - \frac{27}{60}y$, (કારણ કે x = a + by છે.)

$\therefore b_{xy} = -\frac{27}{60}$

અહીં b_{xy} અને b_{yx} બંનેની કિંમત વિરુદ્ધ એટલે કે એક ઘન કિંમત અને બીજી ઋણ કિંમત છે. જે શક્ય નથી. આમ, આ આપેલ માહિતી અસંગત હોવાથી સહસંબંધાંક મળશે નહીં.

ઉદાહરણ - 11 નીચે આપેલ માહિતી પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણ મેળવો તથા xની કિંમત 60 હોય ત્યારે yની કિંમત મેળવો.

$\overline{x} = 48, \overline{y} = 20, S_x = 6, S_y = 9, r = -0.6$

જવાબ :

(1) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

જ્યાં $b_{yx} = r\frac{S_y}{S_x} = (-0.6)\left(\frac{9}{6}\right) = -0.9$

તથા $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 20 - (-0.9)(48) = 63.2$

$\therefore$ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 63.2 – 0.9x થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = a + by છે.

જ્યાં $b_{xy} = r\frac{S_x}{S_y} = (-0.6)\left(\frac{6}{9}\right) = -0.4$

તથા $a = \overline{x} - b\overline{y}$

$= 48 - (-0.4)(20)$

$a = 56$

$\therefore$ x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $x = 56 - 0.4y$ થશે.

(3) હવે જ્યારે x ની કિંમત 60 હોય ત્યારે y ની કિંમત :

y = 63.2 – 0.9x

y = 63.2 – 0.9(60) = 9.2

ઉદાહરણ - 12 નીચે આપેલ માહિતી પરથી જ્યારે x = 0.42 હોય ત્યારે y ની કિંમત અને y = 100 હોય ત્યારે xની કિંમત મેળવો.

x	0.36	0.32	0.37	0.34	0.35	0.33	0.38
y	85	84	84	83	85	81	82

જવાબ :

	x	y	d_x	d_y	d_x^2	d_y^2	d_xd_y
	0.36	85	1	1	1	1	1
	0.32	84	-3	0	9	0	0
	0.37	84	2	0	4	0	0
	0.34	83	-1	-1	1	1	1
	0.35	85	0	1	0	1	0
	0.33	81	-2	-3	4	9	6
	0.38	82	3	-2	9	4	-6
કુલ	2.45	584	0	-4	28	16	2

અહીં $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2.45}{7} = 0.35$ $\qquad \therefore d_x = \frac{x - A}{C_x} \Rightarrow d_x = \frac{x - 0.35}{1/100}$

અને $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{584}{7} = 83.4$ $\qquad \therefore d_y = \frac{y - B}{C_y} \Rightarrow d_y = \frac{y - 84}{1}$

(1) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

જ્યાં $b_{yx} = \frac{n\sum d_xd_y - \sum d_x \sum d_y}{n\sum d_x^2 - \left(\sum d_x\right)^2}\left(\frac{C_y}{C_x}\right)$

$$= \frac{7(2) - (0)(-4)}{7(28) - (0)^2}\left(\frac{1}{1/100}\right)$$

$$= \frac{14}{196}100 = 7.14$$

ઉપરોક્ત કિંમતો સમીકરણ a $= \bar{y} - b\bar{x}$ માં મૂકતાં,

a = 83.4 – (7.14) (0.35) = 80.9

$\therefore$ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ $y = 80.9 + 7.14x$ થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = a + by છે.

જ્યાં $b_{xy} = \frac{n\sum d_xd_y - \sum d_x \sum d_y}{n\sum d_y^2 - \left(\sum d_y\right)^2}\left(\frac{C_x}{C_y}\right)$ ઉપરોક્ત કિંમત સમીકરણ $a = \bar{x} - b\bar{y}$ માં મૂકતાં,

$$= \frac{7(2) - (0)(-4)}{7(16) - (-4)^2}\left(\frac{1}{100}\right)$$

a = 0.35 – (0.0014) (83.4)

$b_{xy} = 0.0014$ $a = 0.228$

$\therefore$ x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = 0.228 + 0.0014y થશે.

(3) હવે જ્યારે x = 0.42 હોય ત્યારે y ની કિંમત

$y = 80.9 + 7.14x$

$y = 80.9 + 7.14\ (0.42)$

$y = 83.8988$

હવે જ્યારે y = 100 હોય ત્યારે x ની કિંમત :

$x = 0.228 + 0.0014y$

$x = 0.228 + 0.0014\ (100)$

$x = 0.228 + 0.14$

$x = 0.368$

ઉદાહરણ - 13 બે નિયત સંબંધ રેખાઓના સમીકરણ ઉપરથી આપેલ x અને yની કિંમતો માટે y અને xની કિંમતો મેળવેલ છે. તે પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાઓ શોધો. તથા તે રેખાઓ પરથી x અને yના મધ્યકો અને x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

આપેલ કિંમત	અંદાજીત કિંમત
x = 8	y = 9
x = 5	y = 6
y = 5	x = 2.2
y = 10	x = 4.2

જવાબ : (1) y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = a + bx છે.

$$\underset{\text{અંદાજીત કિંમત}}{\underset{\uparrow}{y}} \quad = \quad \underset{\text{આપેલ કિંમત}}{\underset{\uparrow}{a+bx}}$$

આપણને આપેલ xની કિંમત તથા yની અંદાજીત કિંમત સમીકરણમાં મૂકતાં,

$a + 8b = 9$ [x = 8, y = 9, x = 5, y = 6] (a + bx = y)

$a + 5b = 6$

$-\quad -\quad -$

$3b = 3$

$\therefore b = b_{yx} = 1$

હવે સમીકરણ a + 8b = 9માં b = 1 મૂકતાં,

$a + 8\ (1) = 9$

a = 1 થશે.

$\therefore$ y ની x ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ y = 1 + x ....(i) થશે.

(2) x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = a+by છે.

$$\underset{\text{અંદાજીત કિંમત}}{\underset{\uparrow}{x}} \quad = \quad a \quad + \quad \underset{\text{આપેલ કિંમત}}{\underset{\uparrow}{by}}$$

આપણને આપેલ yની કિંમત તથા xની અંદાજીત કિંમત સમીકરણમાં મૂકતાં,

a + 5b = 2.2 [y = 5, x = 2.2, y = 10, x = 4.2] (a + by = x)

a + 10b = 4.2

− − −

$-5b = -2$

$\therefore b = b_{xy} = 0.4$

હવે a + 5b = 2.2 માં b = 0.4 મૂકતાં,

a + 5 (0.4) = 2.2 a + 2 = 2.2 થશે.

a = 0.2

$\therefore$ x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ x = 0.2 + 0.4y.......(ii) થશે.

સમીકરણ (i) અને (ii) ઉકેલતા

$\bar{x} = 1$ અને $\bar{y} = 2$ મળશે.

(3) x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક :

$r = \pm\sqrt{b_{xy} b_{yx}}$

$r = \sqrt{(1)(0.4)}$

r = 0.632

સ્વાધ્યાય

1. સૈદ્ધાંતિક પ્રશ્નો

(1) નિયત સંબંધાંકની વ્યાખ્યા આપી તેના ગુણધર્મ અને ઉપયોગ જણાવો.

(2) નિયત સંબંધ રેખાઓ અને તેના ગુણધર્મો સમજાવો.

(3) નિયત સંબંધ રેખાના ઉપયોગો જણાવો.

(4) નિયત સંબંધનું મહત્ત્વ સમજાવો.

(5) નિયત સંબંધના અભ્યાસનું મહત્ત્વ તેમના પ્રકાર, ગાણિતિક સ્વરૂપ અને ઉપયોગ જણાવો.

(6) નિયત સંબંધ રેખાના અન્વાયોજન માટેની ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત સમજાવો.

2. ટૂંકનોંધ

(1) નિયત સંબંધ પૃથક્કરણ

(2) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

3. બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો

(1) નિયત સંબંધની શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજન રેખા કઈ રીતથી મેળવાય છે ?

(અ) મહત્ત્વ વર્ગોની રીત (બ) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

(ક) કાર્લ પિયર્સનની રીત (ડ) સહસંબંધની રીત

(2) .... બે ચલ વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ દર્શાવે છે.

(અ) મધ્યક (બ) વિચલન (ક) સહસંબંધ (ડ) નિયત સંબંધ

(3) b_{yx} એટલે શું ?

(અ) xની કિંમતમાં એક એકમનો ફેરફાર કરવાથી y ની કિંમતમાં થતો અંદાજીત ફેરફાર

(બ) yની કિંમતમાં એક એકમનો ફેરફાર કરવાથી x ની કિંમતમાં થતો અંદાજીત ફેરફાર

(ક) અંતઃખંડ (ડ) સાપેક્ષ ચલ

(4) નીચેના પૈકી y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા કઈ છે ?

(અ) $\hat{y} = a + bx$ (બ) $\hat{x} = a + by$ (ક) $\hat{y} = a + bx + cx^2$ (ડ) $\hat{y} = a^2 + bx$

(5) સહસંબંધાંકની કઈ કિંમત માટે નિયત સંબંધાંકની કિંમત શૂન્ય થાય છે ?

(અ) $r = -1$ (બ) $r = 0$ (ક) $r = 1$ (ડ) $r = 2$

(6) બે નિયત સંબંધ રેખા કયા બિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

(અ) (0, 0) (બ) $(\overline{x}, 0)$ (ક) $(0, \overline{y})$ (ડ) $(\overline{x}, \overline{y})$

(7) નીચેનામાંથી સાચું સમીકરણ પસંદ કરો.

(અ) $b_{yx} = r\frac{S_x}{S_y}$ (બ) $b_{xy} = r\frac{S_y}{S_x}$ (ક) $b_{yx} = r\frac{S_y}{S_x}$ (ડ) $b_{xy} = \frac{S_x}{S_y}$

(8) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખાના કિસ્સામાં e = ... થશે.

(અ) $x - \hat{x}$ (બ) $y - \hat{y}$ (ક) $x - \hat{y}$ (ડ) $\hat{x} - y$

(9) જો y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા $\hat{y} = 25 + 3x$ હોય તો $x = 10$ માટે y ની અનુમાનિત કિંમત .... થાય.

(અ) 50 (બ) 55 (ક) 20 (ડ) 45

10. જો y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા $3x + 2y = 50$ હોય તો b_{yx} = ...

(અ) $\frac{2}{3}$ (બ) $\frac{3}{2}$ (ક) $\frac{-2}{3}$ (ડ) $\frac{-3}{2}$

જવાબ : 1. (બ) 2. (ડ) 3. (અ) 4. (અ) 5. (બ) 6. (ડ) 7. (ક) 8. (બ) 9. (બ) 10. (ડ)

4. નીચેના પદો સમજાવો.

(1) નિયત સંબંધ

(2) નિયત સંબંધાંક

(3) ત્રુટી

(4) નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણ

5. નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો.

(1) નિયત સંબંધની વ્યાખ્યા આપો.

(2) નિયત સંબંધાંકની વ્યાખ્યા આપો.

(3) નિયત સંબંધ રેખાના સંદર્ભમાં ત્રુટી એટલે શું ?

(4) નિયત સંબંધની શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજિત રેખા મેળવવા માટેની રીતનું નામ આપો.

(5) નિયત સંબંધાંક શેના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર નથી ?

(6) નિયત સંબંધાંક શેના પરિવર્તનથી સ્વતંત્ર છે ?

(7) નિયત સંબંધ રેખાઓ બે શા માટે હોય છે ?

(8) નિયત સંબંધનું મહત્વ સમજાવો.

(9) જો $S_x = 2$, $S_y = 4$, $r = 0.5$ હોય, તો નિયત સંબંધાંક b_{xy} ની કિંમત કેટલી થશે?

[જવાબ : b_{xy}=0.25]

(10) જો $y = 2 + x$ એ y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા હોય તો નિયત સંબંધાંક b_{yx}ની કિંમત શું થશે ?

[જવાબ : b_{xy}=1]

6. નીચેના પદોના તફાવત આપો.

(1) નિયત સંબંધ અને નિયત સંબંધાંક

(2) સહસંબંધાંક અને નિયત સંબંધાંક

(3) સહસંબંધ અને નિયત સંબંધ

(4) નિરપેક્ષ ચલ અને સાપેક્ષ ચલ

7. વ્યવહારિક દાખલાઓ :

(1) નીચે આપેલી માહિતી પરથી જ્યારે $y = 100$ હોય ત્યારે x અને $x = 100$ હોય ત્યારે y ની અનુમાનિત કિંમત મેળવો.

$\overline{x} = 30.4, \overline{y} = 26.5, S_x = 6, S_y = 0.8, r = 0.56$

[જવાબ : $y = 24.22 + 0.075\,x$, $x = -80.9 + 4.2\,y$, $y_e = 31.72$, $x_e = 339.1$]

(2) જો $\overline{x} = 10, \overline{y} = 50, S_x = 5, S_y = 10,\ r = 0.80$ હોય તો, બે નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવી અને જ્યારે $x = 20$ હોય ત્યારે y ની અનુમાનિત કિંમત મેળવો.

[જવાબ : $y = 34 + 1.6\,x$, $x = -10 + 0.4\,y$, $y_e = 66$]

(3) એક લિમિટેડ કંપનીના શેરની કિંમત બે સ્ટોક એક્ષચેંજમાં નીચે મુજબ આપેલ છે. આ માહિતી ઉપરથી બે નિયત સંબંધ સમીકરણ મેળવો. જ્યારે અમદાવાદ સ્ટોક એક્ષચેંજમાં ભાવ રૂ. 22 હોય ત્યારે મુંબઈ સ્ટોક એક્ષચેંજનો ભાવ શું હશે તે શોધો.

	અમદાવાદ સ્ટોક એંક્ષચેજ	મુંબઈ સ્ટોક એક્ષચેંજ	
મધ્યક	16	20	
પ્રમાણિત વિચલન	4	5	r = 0.08

[જવાબ : $y = 4 + x$, $x = 3.2 + 0.64\,y$, $y_e = 26$]

(4) જો બે નિયત સંબંધ રેખા $65x + 100y = 165$ અને $10x + 13y = 23$ તથા yનું પ્રમાણિત વિચલન 2 હોય તો b_{yx}, b_{xy}, r અને S_x શોધો.

[જવાબ :: $b_{xy} = -0.65$, $b_{yx} = -1.3$, $r = -0.9192$, $S_x = 2.8283$]

(5) નીચેની આપેલ માહિતી ઉપરથી બે નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણ મેળવો.

(1) જ્યારે પત્નીની ઉપર 20 વર્ષ હોય ત્યારે પતિની ઉંમર શોધો.

(2) જ્યારે પતિની ઉંમર 30 વર્ષ હોય ત્યારે પત્નીની ઉંમર શોધો.

પત્નીની ઉંમર	પતિની ઉંમર		
	20-25	25-30	30-35
16 - 20	9	14	-
20 - 24	6	11	3
24 - 28	-	-	7

[જવાબ : x = પતિની ઉંમર, y = પત્નીની ઉંમર, $y = 8.03 + 0.47x$,
$x = 12 + 0.7235\, y$, $x_e = 26.47$ વર્ષ $y_e = 22.13$ વર્ષ]

(6) નીચેના કોષ્ટકમાં વિદ્યાર્થીઓનું વજન તથા ઊંચાઈનું આવૃત્તિ વિતરણ આપેલ છે.

ઊંચાઈ *(Y)*	વજન (કિ.ગ્રા.) (*x*)			
(ઈંચ)	90-100	100-110	110-120	120-130
50-55	5	3	2	-
55-60	10	4	-	3
60-65	-	8	2	5
65-70	-	-	4	6
70-75	-	-	-	8

જ્યારે વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ 72 ઈંચ હોય ત્યારે તેનું વજન શોધો. જ્યારે વિદ્યાર્થીનું વજન 140 કિ.ગ્રા. હોય ત્યારે તેની ઊંચાઈ શોધો.

[જવાબ : $y = 20.7517 + 0.3673x$, $x = 29.9013 + 1.3196y$, $x_e = 124.9125$ કિ.ગ્રા., $y_e = 72.1737$ ઈંચ]

ધારો કે, x = વિદ્યાર્થીનું વજન y = વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ

(7) બે નિયત સંબંધ રેખા ઉપરથી જ્યારે x ની કિંમત આપેલી હોય ત્યારે yની અંદાજીત કિંમત તથા જ્યારે y ની કિંમત આપેલી હોય ત્યારે xની અંદાજીત કિંમત મેળવેલ છે. આ માહિતી ઉપરથી બે નિયત સંબંધ રેખા તથા $\bar{x}, \bar{y}$ મેળવો.

આપેલ કિંમત	અંદાજીત કિંમત
x = 5	y = 20
x = 7	y = 16
y = 14	x = 7
y = 10	x = 8

[જવાબ : $y = 30 - 2x$, $x = 10.5 - 0.25y$, $\bar{x} = 6$, $\bar{y} = 18$]

(8) 100 વિદ્યાર્થીઓના પ્રશ્નપત્ર - 1 અને પ્રશ્નપત્ર - 2 ના ગુણના મધ્યક તથા પ્રમાણિત વિચલનની માહિતી આપેલ છે.

મધ્યક	પ્રમાણિત વિચલન
પ્રશ્નપત્ર - 1 = 39.5	પ્રશ્નપત્ર - 1 = 10.0
પ્રશ્નપત્ર - 2 = 47.5	પ્રશ્નપત્ર - 2 = 16.8

પ્રશ્નપત્ર - 1 અને તથા પ્રશ્નપત્ર - 2 નો ‘r’ = 0.42

જે વિદ્યાર્થીને પ્રશ્નપત્ર - 1માં 50 ગુણ આવ્યા હોય તેને પ્રશ્નપત્ર - 2 કેટલા ગુણ આવ્યા હશે ?

[જવાબ : x = પ્રશ્નપત્ર-1ના ગુણ, y = પ્રશ્નપત્ર-2ના ગુણ, $y = 19.6288 + 0.7056x$, $y_e = 54.9088$]

(9) નીચેની માહિતી પરથી બે નિયત સંબંધ રેખાના સમીકરણ મેળવો.

x	15	19	20	22	24	27	30
y	16	18	15	14	18	20	25

[જવાબ : $y = 5.452 + 0.559x$, $x = 3.551 + 1.049y$]

(10) નીચે આપેલી માહિતી પરથી યોગ્ય નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

સ્વતંત્ર ચલ	2	4	6	8	10	12
આધારિત ચલ	9	16	12	15	16	18

[જવાબ : $y = 9.533 + 0.686x$]

(11) નીચેની માહિતી પરથી જ્યારે y = 15 હોય ત્યારે xની કિંમત શોધો.

$$\sum x = 35,\ \sum y = 170,\ \sum xy = 680,\ \sum x^2 = 145,\ \sum y^2 = 3246,\ n = 10$$

[જવાબ : $x = -0.5579 + 0.2387y$, $x_e = 3.0226$]

(12) નીચેની માહિતી પરથી yનું x પરનું નિયત સંબંધ રેખાનું સમીકરણ મેળવો. જ્યારે x = 19 હોય ત્યારે yની કિંમત શોધો.

x	18	26	28	31	25	19	35
y	11	16	19	17	14	11	24

[જવાબ : $y = -2.571 + 0.714x$, $x_e = 10.995$]

(13) y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા $5y = 3x - 5$ તથા x ની y પરની નિયત સંબંધ રેખા $3y - 5x - 2 = 0$ છે તો x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

[જવાબ : $r = 0.6$]

(14) x અને y બે ચલોની નિયત સંબંધ રેખાઓ $3x + 2y - 26 = 0$, $6x + y - 30 = 0$ હોય તો નીચેની કિંમત શોધો.

(i) $\bar{x}, \bar{y}$, (ii) r (iii) x = 5 હોય ત્યારે yની કિંમત શોધો.

[જવાબ : $\bar{x} = 4.27, \bar{y} = 7.33, b = -1.5, b_{xy} = -0.16, r = -0.5, y_e = 5.5$]

(15) નીચેની માહિતી પરથી x ની y ઉપરની નિયત સંબંધ રેખા શોધો.

$$\sum x = 60,\ \sum y = 40,\ \sum xy = 1150,\ \sum x^2 = 4160,\ \sum y^2 = 1720,\ n = 10$$

[જવાબ : $x = 3.6668 + 0.5833y$]

(16) બે નિયત સંબંધ રેખા $6x + 10y = 119$ તથા $30x + 45y + 180 = 0$ તથા yનું વિચરણ 4 હોય તો

(i) $\bar{x}, \bar{y}$ (ii) r (iii) S_x^2 શોધો.

[જવાબ : $\bar{y} = 155, \bar{x} = -238.5, r = -0.9486, s_x^2 = 10$]

(17) નીચેની માહિતી પરથી y ની x પરની નિયત સંબંધ રેખા શોધો. ઉપરાંત જ્યારે x = 42 હોય ત્યારે y કિંમત શોધો.

x → ↓ y	20-40	40-60	60-80	80-100
20-30	10	7	-	-
30-40	-	10	3	-
40-50	-	6	5	1
50-60	-	-	2	6

[જવાબ : $y = 2.4576 + 0.658x$, $\hat{y} = 30$]

(18) નીચે આપેલ દ્વિચલ કોષ્ટક પરથી બે નિયત સંબંધ રેખા તથા x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

આંકડાશાસ્ત્રના ગુણ	એકાઉન્ટના ગુણ			
	5-15	15-25	25-35	35-45
0-10	1	1	-	-
10-20	3	6	5	1
20-30	1	8	9	2
30-40	-	3	9	3
40-50	-	-	4	1

[જવાબ : $y = 11.073 + 0.5692x$, $x = 16.684 + 0.3697y$, $r = 0.4587$]

(19) નીચે આપેલી માહિતી દ્વિચલ આવૃતિ વિતરણ પરથી મેળવેલ છે.

x નો મધ્યક = 52.1   yનો મધ્યક = 112.3

x નું વિચરણ = 49   yનું વિચરણ = 64

x અને y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક = 0.3

(i) જ્યારે x = 38 હોય ત્યારે yની કિંમત મેળવો.

(ii) જ્યારે y = 98 હોય ત્યારે x ની કિંમત મેળવો.

[જવાબ : $y = 94.43 + 0.343\ x$, $x = 22.62 + 0.2625y$, $\hat{y} = 107.464$, $\hat{x} = 48.345$]

(20) x અને y ના ચલો પરથી નીચેની માહિતી આપેલ છે.

$\bar{x} = 20, s_x = 4, \bar{y} = 15, s_y = 3, r = 0.7$

આ માહિતી ઉપરથી બે નિયત સંબંધ રેખા મેળવો તથા જ્યારે x = 20 હોય ત્યારે y ની કિંમત મેળવો.

[જવાબ : $y = 4.5 + 0.525x$, $x = 6 + 0.933\ y$, $y_e = 15$]

એકમ 4 સૂચક આંક

4.1 અર્થ અને વ્યાખ્યા

જુદી જુદી વસ્તુનો ભાવ, વ્યાપારવૃદ્ધિ, ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન, કુટુંબોના માસિક ખર્ચ વગેરેમાં થતી વધઘટ એક જ દિશામાં થતી નથી. સમૂહમાં સમાવિષ્ટ કેટલીક વસ્તુઓની કિંમતોમાં વધારો થયો હોય છે તો કેટલીક વસ્તુઓની કિંમતોમાં ઘટાડો થયો હોય છે. આવા સંજોગોમાં નિરપેક્ષ વધઘટનો અભ્યાસ અર્થપૂર્ણ બનતો નથી. આ વધઘટનો સારી રીતે અભ્યાસ કરવા માટે સૂચક આંકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

ધારો કે આપણે એક સમૂહમાં આવતી જુદી જુદી વસ્તુઓના ભાવના વધઘટનું માપ શોધવું છે. સામાન્ય રીતે એક જ સમૂહમાં આવતી વસ્તુઓના ભાવોના એકમો ભિન્ન હોય છે જેમ કે ચોખાની ભાવ દર કિ.ગ્રામ આપેલ હોય, ઈંડાનો ભાવ દર ડઝને આપેલ હોય અથવા દૂધનો ભાવ દર લીટરે આપેલ હોય. ભાવોના એકમો ભિન્ન ભિન્ન હોવાથી તેમને સીધી રીતે સરખાવી શકાતા નથી. આ સરખામણી શક્ય કરવા માટે બધા ભાવોને કોઈ એક નિયત સમયના ભાવોના સાપેક્ષમાં ટકાવારીમાં દર્શાવવા આવે છે. ટકાવારી દર્શાવતા આ બધા આંકડાઓમાંથી જો સરેરાશ ટકાવારી શોધવામાં આવે તો તે સરેરાશ નિયત કરેલા સમયથી ચાલુ સમય સુધીમાં થયેલ ભાવની સપાટીની સામાન્ય વધઘટનું માપ આવશે. આ સરેરાશ દર્શાવતા આંકને ભાવનો સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.

આજ રીતે સમૂહમાં આવેલી પ્રત્યેક વસ્તુ માટેનો જથ્થામાં થતાં સાપેક્ષ ફેરફાર માટેનો આંક શોધી મેળવેલ સરેરાશ માપને તે સમૂહ માટેનો જથ્થા સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે. જીવનનિર્વાહ, વેચાણ, ઉત્પાદન, આયાત, નિકાસ, વેતન વગેરેમાં થતી વધઘટ માપવા માટે પણ આ જ રીતે સૂચક આંક મેળવી શકાય છે.

વ્યાખ્યા :

કોઈ પણ એક કે તેથી વધુ વસ્તુઓની આપેલ (ચાલુ) સમયની ચલની કિંમતોમાં કોઈ ચોક્કસ (આધાર) સમયની તે વસ્તુઓની ચલની કિંમતોના સાપેક્ષમાં થતા ટકાવારી ફેરફારની સરેરાશને સામાન્ય સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.

$$\text{સામાન્ય સૂચક આંક } (I) = \frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{n} \times 100$$

જ્યાં

P_1 = ચાલુ સમય માટે ચલની કિંમત

P_0 = આધાર સમય માટે ચલની કિંમત

n = વસ્તુઓની સંખ્યા.

અહીં આપણે n વસ્તુના સમૂહનો સામાન્ય સરેરાશ કે સામાન્ય મધ્યકનો ઉપયોગ કર્યો છે. પરંતુ ગુણોત્તર મધ્યક કે ભારિત મધ્યકનો ઉપયોગ પણ કરી શકાય.

4.2 સૂચક આંકના લક્ષણો

સૂચક આંકના લક્ષણો નીચે પ્રમાણે છે.

(1) સૂચક આંક ટકાવારી ફેરફાર દર્શાવતું સાપેક્ષ માપ છે.

(2) સૂચક આંક એકમથી મુક્ત માપ છે.

(3) સૂચક આંક તુલનાત્મક માપ છે.

(4) સૂચક આંક એક વિશિષ્ટ સરેરાશ માપ છે.

4.3 સૂચક આંકની ઉપયોગિતા

સૂચક આંક કોઈ પણ વસ્તુમાં થતી વધઘટનું માપ આપે છે. ભાવના વધઘટના માપ ઉપરાંત જીવનનિર્વાહ, વેચાણ, ઉત્પાદન, સામાજિક કે ઔદ્યોગિક પ્રવૃત્તિ, આયાત-નિકાસ વગેરે અનેક ક્ષેત્રે થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ કરવાનું ઉપયોગી સાધન છે.

સૂચક આંકના કેટલાક ઉપયોગ નીચે પ્રમાણે છે :

(1) જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંક (જીવનની જરૂરી ચીજવસ્તુઓના ખર્ચનો સૂચક આંક)થી નાણાંની ખરીદશક્તિ મેળવી શકાય છે.

$$\text{નાણાંની ખરીદશક્તિ} = \frac{1}{\text{જીવનાનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક}} \times 100$$

આ ઉપરાંત આ સૂચક આંકનો ઉપયોગ કર્મચારીઓના પગાર, મોંઘવારી જથ્થા, બોનસ વગેરે પણ ઉપયોગમાં લેવાય છે.

(2) જથ્થાબંધ ભાવનો સૂચક આંક સરકાર, ઉત્પાદકો તથા વેપારીઓને નીતિવિષયક નિર્ણયો લેવામાં ઉપયોગી છે.

(3) કૃષિ-પેદાશની સૂચક આંકના ઉપયોગથી સરકાર કૃષિ નીતિઓનું આયોજન કરે છે અને ખેતી ઉત્પાદનના યોગ્ય ટેકારૂપ ભાવ પણ નક્કી કરી શકે છે.

(4) ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન સૂચક આંક દેશનો વિકાસદર વધારવા, ઔદ્યોગિક અને વ્યાપારી પ્રવૃત્તિઓનું આયોજન અને નીતિઓ નક્કી કરવામાં ઉપયોગી થાય છે.

(5) માનવવિકાસનો સૂચક આંક માનવવિકાસની કક્ષા, જીવનધોરણ, શિક્ષણ સ્તર વગેરે નક્કી કરવામાં ઉપયોગી છે.

આમ, સૂચક આંક જીવનવ્યવહારના વિવિધ ક્ષેત્રોને ઉપયોગી માર્ગદર્શન પૂરું પાડે છે. જેમ બેરોમીટર હવામાનની આગાહી કરવામાં ઉપયોગી બને છે તેમ સૂચક આંક દેશની સમગ્ર આર્થિક અને સામાજિક પ્રવૃત્તિઓના થતા ફેરફાર માપવા મદદરૂપ થાય છે. તેથી સૂચક આંકને દેશના અર્થતંત્રની પારાશીશી (બેરોમીટર) કહે છે.

4.4 સૂચક આંકની મર્યાદા

સૂચક આંકને આપણે માત્ર એક સંકેતક તરીકે ગણીને જ તેનો ઉપયોગ કરી શકીએ. કારણ કે તેની ગણતરીમાં આધાર વર્ષની પસંદગી, વસ્તુની પસંદગી, યોગ્ય સરેરાશની પસંદગી વગેરે અનેક મુશ્કેલીઓ આવે છે. વળી, એક હેતુ માટે જે સૂચક આંક ઉપયોગી હોય તે અન્ય હેતુ માટે

બિનઉપયોગી પણ નીવડી શકે છે.

આમ, સૂચક આંકની અનેક ક્ષેત્રે ઉપયોગિતા છે પણ તેનો ઉપયોગ તેની મર્યાદાઓને ધ્યાનમાં રાખી કરવો જોઈએ.

4.5 સૂચક આંકની રચના માટેના મુદ્દાઓ

કોઈપણ સૂચક આંકની રચના કરવાની રીતમાં નીચેના મુદ્દાઓ ધ્યાનમાં રાખવા જોઈએ :

(1) હેતુ : સૂચક આંકની રચના કરતાં પહેલાં તેની રચનાના હેતુનું સ્પષ્ટીકરણ કરવું જોઈએ. કારણ કે વસ્તુઓની પસંદગી, તેમની સંખ્યા, આધાર વર્ષની પસંદગી વગેરે હેતુ પર આધાર રાખે છે.

ધારો કે આપણે મજૂર વર્ગની પરિસ્થિતિના અભ્યાસ માટે સૂચક આંકની રચના કરવી છે. હવે મજૂર વર્ગની જરૂરિયાતો તવંગર વર્ગની જરૂરિયાતો કરતાં જુદી જ હોય છે. મોજશોખની વસ્તુઓના ભાવમાં થયેલી વધઘટની તવંગર વર્ગના કૌટુંબિક બજેટમાં ફેરફાર થાય છે પણ તે વધઘટથી મજૂર વર્ગના કૌટુંબિક બજેટમાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી.

તેથી સૂચક આંકની રચના માટે હેતુ સ્પષ્ટ હોવો જરૂરી છે.

(2) વસ્તુઓની પસંદગી અને તેમના ભાવ : જે વર્ગના માણસો માટે સૂચક આંકની રચના કરવાની હોય તે વર્ગના માણસો વડે બહોળી વપરાશમાં લેવાતી વસ્તુની પસંદગી કરવી જોઈએ.

જે વસ્તુઓ પસંદ કરવામાં આવે તે બધી વસ્તુઓના ભાવ પ્રમાણિત કે સરકાર માન્ય જે તે વર્ગના લોકોના ખરીદીના સ્થળની દુકાનોમાંથી મેળવવા જોઈએ. જો એક કરતાં વધારે જગ્યાએથી ભાવ લેવામાં આવે તો ભાવની સરેરાશ લેવી જોઈએ.

(3) આધાર વર્ષની પસંદગી : વસ્તુઓના ભાવ મેળવ્યા પછી તે ભાવને ટકાવારીમાં દર્શાવવા માટે આધાર વર્ષ પસંદ કરવું પડે છે. આધાર વર્ષની પસંદગી માટે નીચેની બે રીતો પ્રચલિત છેઃ

(a) અચલ આધારની રીત (Fixed base method)

(b) પરંપરિત આધારની રીત (Chain base method)

(a) અચલ આધારની રીત : આ રીતમાં સામાન્ય ઘટના કે પરિસ્થિતિવાળા સમય કે વર્ષને સ્થિર ગણી આધાર વર્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે. જ્યારે કોઈ એક વર્ષને આધાર વર્ષ નક્કી કરવું મુશ્કેલ હોય ત્યારે અમુક વર્ષોની સરેરાશ કિંમતને આધાર વર્ષની ચલ કિંમત તરીકે લેવી જોઈએ. આધાર વર્ષની ચલ કિંમતને વર્તમાન વર્ષની ચલ કિંમત સાથે સરખાવી સૂચક આંક મેળવવામાં આવે છે. આધાર વર્ષ ઘણા દૂરના ભૂતકાળનું વર્ષ ન બને તે માટે સમયાંતરે આધાર વર્ષ બદલવું જોઈએ.

અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક નીચેના સૂત્રથી મેળવાય છે :

$$\text{સૂચક આંક (I)} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષની ચલ કિંમત}}{\text{આધાર વર્ષની ચલ કિંમત}} \times 100$$

(b) પરંપરિત આધારની રીત : અચલ આધારની રીતમાં એક વર્ષને અથવા અમુક વર્ષોની સરેરાશને અચલ આધાર તરીકે લઈ બધી જ ટકાવારી તેને આધારે ગણવામાં આવે છે. જ્યારે પરંપરિત આધારની રીતમાં પ્રત્યેક વર્ષની ટકાવારી તેની અગાઉના વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ ગણવામાં આવે છે.

પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક નીચેના સૂત્રથી મેળવાય છે :

$$\text{સૂચક આંક (I)} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષની ચલ કિંમત}}{\text{અગાઉના વર્ષની ચલ કિંમત}} \times 100$$

(4) સરેરાશ પસંદગી : જુદી જુદી વસ્તુઓની ટકાવારી શોધ્યા પછી આ બધી વસ્તુઓ માટે એક સૂચક આંક મેળવવાનું જરૂરી છે. આ માટે બધી જ વસ્તુઓની ટકાવારીનો સરેરાશનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ પણ કયા સરેરાશનો ઉપયોગ યોગ્ય રહેશે તે પણ ચકાસવું જરૂરી બને છે.

જ્યારે એક સમૂહની વસ્તુઓને તેમના સાપેક્ષ તફાવતોની દૃષ્ટિએ જોવાની હોય ત્યારે અન્ય કોઈ સરેરાશ કરતાં ગુણોત્તર મધ્યક વધુ ઉપયોગી છે.

(5) ભાવ : સૂચક આંકનો મુખ્ય હેતુ ભાવની સપાટીની વધઘટ માપવાનો છે. સમાંતર મધ્યકની રીતે પ્રત્યેક વસ્તુને સમાન મહત્ત્વ આપવામાં આવે છે પણ સામાન્ય રીતે જુદા જુદા વર્ગોના માણસો માટે જુદી જુદી વસ્તુઓનું મહત્ત્વ એકસરખું હોતું નથી. તેથી સૂચક આંકની ગણતરી જે વસ્તુઓ વધુ મહત્ત્વની હોય તેમને તેમના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં ભાર આપવામાં આવે છે.

વસ્તુઓને આપવામાં આવતો ભાર બે પ્રકારનો હોય છે : ગર્ભિત ભાર અને સ્પષ્ટ ભાર.

ગર્ભિત ભાર : ભાર આપવાની આ પરોક્ષ રીતમાં જો સૂચક આંકની ગણતરીમાં એક જ વસ્તુની ચાર જુદી જુદી જાતો પસંદ કરવામાં આવે તો 4ને તે વસ્તુનો ગર્ભિત ભાર ગણવામાં આવે છે.

સ્પષ્ટ ભાર : ભાર આપવાની આ પ્રત્યક્ષ રીતમાં વસ્તુને તેના મહત્ત્વના પ્રમાણમાં ભાર આપવામાં આવે છે. આ રીતમાં વસ્તુનો ભાર વસ્તુના વપરાશ, વેચાણ, ઉત્પાદન કે વસ્તુ પાછળ થતાં ખર્ચના પ્રમાણમાં નક્કી કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ - 1 : પાંચ ખોરાકી વસ્તુઓના વર્ષ 2014 અને 2018માં એકમ દીઠ ભાવ (₹) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે. 2014ને આધાર વર્ષ લઈ ખોરાકી વસ્તુઓના ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક મેળવો.

વસ્તુના એકમ દીઠ ભાવ (₹)

વસ્તુ	એકમ	2014	2018
A	લિટર	20	20
B	ટન	40	60
C	ડઝન	60	100
D	પેકેટ	100	120
E	કિ.ગ્રામ	120	80

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષ 2014 લઈને ચાલુ વર્ષ 2018 માટે વસ્તુઓના ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક મેળવવાનો છે.

વસ્તુ	વસ્તુના ભાવ 2014 P_o	2018 P_1	ભાવ સાપેક્ષ $=\frac{P_1}{P_0}$
A	20	20	$\frac{20}{20}=1.0000$
B	40	60	$\frac{60}{40}=1.5000$
C	60	100	$\frac{100}{60}=1.6667$
D	100	120	$\frac{120}{100}=1.2000$
E	120	80	$\frac{80}{120}=0.6667$
કુલ			6.0334

સામાન્ય સૂચક આંક $=\frac{\Sigma\left(P_1/P_0\right)}{n}\times 100$

$=\frac{6.0334}{5}\times 100$

$= 120.67$

ઉદાહરણ - 2 : એક વીજ ઉત્પાદન કંપનીના વર્ષ 2010 થી 2018 સુધી વીજ ઉત્પાદનના આંકડા નીચે પ્રમાણે છે. આ માહિતી પરથી

(i) વર્ષ 2012 ને આધાર વર્ષ

(ii) વર્ષ 2011, 2012 અને 2013ના સરેરાશ ઉત્પાદનને આધાર વર્ષનું ઉત્પાદન લઈ અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક તૈયાર કરો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન ('000 કિ.વોટ)	135	140	140	137	132	137	138	139	140

જવાબ : અહીં (i) 2012ને આધાર વર્ષ લઈ અને (ii) વર્ષ 2011, 2012 અને 2013ની સરેરાશ ઉત્પાદનને લઈ સૂચક આંક મેળવવાના છે.

વર્ષ 2011, 2012 અને 2013નું સરેરાશ ઉત્પાદન

$=\frac{140+140+137}{3}=139$

વર્ષ	ઉત્પાદન ('000 કિ.વોટ)	સૂચક આંક (2012 ને આધાર વર્ષ લઈને)	સૂચક આંક (2011, 2012 અને 2013ની સરેરાશ લઈને)
2010	135	$\frac{135}{140} \times 100 = 96.43$	$\frac{135}{139} \times 100 = 97.12$
2011	140	$\frac{140}{140} \times 100 = 100$	$\frac{140}{139} \times 100 = 100.72$
2012	140	$\frac{140}{140} \times 100 = 100$	$\frac{140}{139} \times 100 = 100.72$
2013	137	$\frac{137}{140} \times 100 = 97.86$	$\frac{137}{139} \times 100 = 98.56$
2014	132	$\frac{132}{140} \times 100 = 94.29$	$\frac{132}{139} \times 100 = 94.96$
2015	137	$\frac{137}{140} \times 100 = 97.86$	$\frac{137}{139} \times 100 = 98.56$
2016	138	$\frac{138}{140} \times 100 = 98.57$	$\frac{138}{139} \times 100 = 99.28$
2017	139	$\frac{139}{140} \times 100 = 99.29$	$\frac{139}{139} \times 100 = 100$
2018	140	$\frac{140}{140} \times 100 = 100$	$\frac{140}{139} \times 100 = 100.72$

ઉદાહરણ - 3 : એક કંપનીના વર્ષ 2009 થી 2018 સુધીના ઉત્પાદનના આંકડા નીચે પ્રમાણે છે. આ માહિતી પરથી પરંપરિત આધારે સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન (ટનમાં)	86	96	102	114	120	116	126	130	135	139

જવાબ : અહીં વર્ષ 2009ના અગાઉના વર્ષનું ઉત્પાદન આપેલ નથી. તેથી વર્ષ 2009નો સૂચક આંક 100 લઈશું.

વર્ષ	ઉત્પાદન (ટનમાં)	પરંપરિત આધારે સૂચક આંક
2009	86	100
2010	96	$\frac{96}{86}\times 100 = 111.63$
2011	102	$\frac{102}{96}\times 100 = 106.25$
2012	114	$\frac{114}{102}\times 100 = 111.76$
2013	120	$\frac{120}{114}\times 100 = 105.26$
2014	116	$\frac{116}{120}\times 100 = 96.67$
2015	126	$\frac{126}{116}\times 100 = 108.62$
2016	130	$\frac{130}{126}\times 100 = 103.17$
2017	135	$\frac{135}{130}\times 100 = 103.85$
2018	139	$\frac{139}{135}\times 100 = 102.96$

ઉદાહરણ - 4 : એક કંપનીના વર્ષ 2012 થી 2016 સુધીના ત્રણ અલગ અલગ વસ્તુના વેચાણ અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી સમાંતર સરેરાશનો ઉપયોગી કરી (i) અચલ આધારની રીતે (આધાર વર્ષ 2012 લેતાં) (ii) પરંપરિત આધારની રીતે વેચાણના સામાન્ય સૂચક આંક શોધો.

વેચાણ (હજાર એકમમાં)

વસ્તુ	2012	2013	2014	2015	2016
A	80	96	112	120	130
B	30	36	42	54	58
C	40	46	50	56	64

જવાબ :

(i) અચલ આધારની રીત :

$$\text{સૂચક આંક (I)} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષની ચલ કિંમત}}{\text{આધાર વર્ષની ચલ કિંમત}}\times 100$$

વસ્તુ	2012	2013	2014	2015	2016
A	100	$\frac{96}{80}\times 100 = 120$	$\frac{112}{80}\times 100 = 140$	$\frac{120}{80}\times 100 = 150$	$\frac{130}{80}\times 100 = 162.5$
B	100	$\frac{36}{30}\times 100 = 120$	$\frac{42}{30}\times 100 = 140$	$\frac{54}{30}\times 100 = 180$	$\frac{58}{30}\times 100 = 193.33$
C	100	$\frac{46}{40}\times 100 = 115$	$\frac{50}{40}\times 100 = 125$	$\frac{56}{40}\times 100 = 140$	$\frac{64}{40}\times 100 = 160$
સરવાળો	300	355	405	470	515.83
સૂચક આંક $= \frac{\text{સરવાળો}}{3}$	$\frac{300}{3}$ = 100	$\frac{355}{3}$ = 118.33	$\frac{405}{3}$ = 135	$\frac{470}{3}$ = 156.67	$\frac{515.83}{3}$ = 171.94

(ii) પરંપરિત આધારની રીત :

$$\text{સૂચક આંક} = \frac{\text{ચાલુ વર્ષની ચલ કિંમત}}{\text{અગાઉના વર્ષની ચલ કિંમત}} \times 100$$

વસ્તુ	2012	2013	2014	2015	2016
A	100	$\frac{96}{80}\times 100 = 120$	$\frac{112}{96}\times 100 = 116.67$	$\frac{120}{112}\times 100 = 107.14$	$\frac{130}{120}\times 100 = 108.33$
B	100	$\frac{36}{30}\times 100 = 120$	$\frac{42}{36}\times 100 = 116.67$	$\frac{54}{42}\times 100 = 128.57$	$\frac{58}{54}\times 100 = 107.41$
C	100	$\frac{46}{40}\times 100 = 115$	$\frac{50}{46}\times 100 = 108.70$	$\frac{56}{50}\times 100 = 112$	$\frac{64}{56}\times 100 = 114.29$
સરવાળો	300	355	342.04	347.71	330.03
સૂચક આંક $= \frac{\text{સરવાળો}}{3}$	$= \frac{300}{3}$ = 100	$= \frac{355}{3}$ =118.33	$= \frac{342.04}{3}$ = 114.01	$= \frac{347.71}{3}$ = 115.90	$= \frac{330.03}{3}$ = 110.01

4.6 સૂચક આંકની ગણતરીની રીતો

સૂચક આંકની ગણતરીની ઘણી અલગ-અલગ રીતો છે. આ બધી જ રીતો મુખ્યત્ત્વે બે પ્રકારની હોય છે : સાપેક્ષ કિંમતોની સરેરાશ અને કિંમતોની સરેરાશનો ગુણોત્તર. સૂચક આંકની ગણતરીની રીતો નીચે આપેલ ચાર્ટમાં દર્શાવામાં આવેલ છે.

સૂચક આંકની ગણતરીની રીતો

- સાપેક્ષ કિંમતોની સરેરાશ (Average of Relatives)
  - સાદી (Simple): $\dfrac{\Sigma\left(\dfrac{P_1}{P_0}\times 100\right)}{n}$
  - ભારિત (Weighted): $\dfrac{\Sigma\left(\dfrac{P_1}{P_0}\times 100\right)\times w}{\Sigma w}$
- કિંમતોની સરેરાશનો ગુણોત્તર (Aggregative)
  - સાદી (Simple): $\dfrac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100$
  - ભારિત (Weighted): $\dfrac{\Sigma P_1 W}{\Sigma P_0 W}\times 100$

ઉદાહરણ - 5 : નીચેની માહિતી પરથી સાદી સાપેક્ષ કિંમતોની સરેરાશની રીતે તથા સાદા સરેરાશના ગુણોત્તરની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

ભાવ

વસ્તુ	**આધાર વર્ષ**	**ચાલુ વર્ષ**
A	20	36
B	10	20
C	4	6
D	50	40

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષના ભાવને P_0 અને ચાલુ વર્ષના ભાવને P_1 લઈશું.

વસ્તુ	P_0	P_1	$\frac{P_1}{P_0}\times 100$
A	20	36	$\frac{36}{20}\times 100 = 180$
B	10	20	$\frac{20}{10}\times 100 = 200$
C	4	6	$\frac{6}{4}\times 100 = 150$
D	50	40	$\frac{40}{50}\times 100 = 80$
કુલ	84	102	610

સાપેક્ષ કિંમતોની સાદી સરેરાશની રીત

$$\text{સૂચક આંક} = \frac{\Sigma \frac{P_1}{P_0}\times 100}{n}$$

$$= \frac{610}{4} = 152.5$$

સાદી સરેરાશના ગુણોત્તરની રીત

સૂચક આંક $= \dfrac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$

$= \dfrac{102}{84} \times 100 = 121.43$

ઉદાહરણ - 6 : નીચેની માહિતી પરથી 2015ને આધાર વર્ષ ગણી 2018નો સાપેક્ષ કિંમતોનો ભારિત સરેરાશની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

ભાવ (₹)

વસ્તુ	2015	2018	ભાર
I	50	40	30
II	38	29	40
III	18	24	15
IV	80	90	15

જવાબ : અહીં 2015ને આધાર વર્ષ ગણવાનું હોઈ તેના ભાવને P_0 અને 2018ના ભાવને P_1 અને ભારને W લઈશું.

વસ્તુ	P_o	P_1	W	$\frac{P_1}{P_0} \times 100$	$\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) \times W$
I	50	40	30	80	2400
II	38	29	40	76.32	3052.8
III	18	24	15	133.33	1999.95
IV	80	90	15	112.5	1087.5
કુલ			100		9140.25

કિંમતોની ભારિત સાપેક્ષ સરેરાશની રીત

સૂચક આંક $= \dfrac{\sum\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) \times w}{\sum w}$

$= \dfrac{9140.25}{100}$

$= 91.40$

આપણે જાણીએ છે કે ભારિત સરેરાશની રીતથી સમૂહોના સામાન્ય સૂચક આંકનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે.

સામાન્ય સૂચક આંક $= \dfrac{\sum p_1 w}{\sum p_0 w} \times 100$

જ્યાં w = ભાર છે.

અર્થશાસ્ત્રી અને આંકડાશાસ્ત્રીઓ ભારની અલગ અલગ કિંમત લઈ જુદા જુદા સૂચક આંકની રચના કરી શકે છે.

લાસ્પેયરનું સૂત્ર : આ પદ્ધતિમાં આધાર વર્ષના જથ્થા q_0ને ભાર તરીકે લેવામાં આવે છે. આ રીતે મેળવેલ ભારિત સરેરાશના સૂત્રને લાસ્પેયરના સૂચક આંકનું સૂત્ર કહેવામાં આવે છે.

લાસ્પેયરનો સૂચક આંક (I_L) $= \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$

પાશેનું સૂત્ર

આ પદ્ધતિમાં ચાલુ વર્ષના જથ્થા (q_1)ને ભાર તરીકે લેવામાં આવે છે. આ રીતે મેળવેલ ભારિત સરેરાશના સૂત્રને પાશેના સૂચક આંકનું સૂત્ર કહેવામાં આવે છે.

પાશેનો સૂચક આંક $(I) = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$

માર્શલ-એજવર્થનું સૂત્ર

આ પદ્ધતિમાં આધાર અને ચાલુ વર્ષના જથ્થાની સરેરાશ એટલે કે $\left(\frac{q_0 + q_1}{2}\right)$ ભાર તરીકે લેવામાં આવે છે.આ રીતે મેળવેલ ભારિત સરેરાશના સૂત્રને માર્શલ-એજવર્થનું સૂત્ર કહેવામાં આવે છે.

માર્શલ-એજવર્થનો સૂચક આંક (I_{ME})

$$= \frac{\sum p_1 \left(\frac{q_0 + q_1}{2}\right)}{\sum p_0 \left(\frac{p_0 + q_1}{2}\right)} \times 100$$

$$= \frac{\sum p_1 (q_0 + q_1)}{\sum p_0 (q_0 + q_1)} \times 100$$

$$= \frac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1} \times 100$$

ડોરબીશ-બાઉલીનું સૂત્ર

આ પદ્ધતિમાં લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકના સમાંતર મધ્યકને ડોરબીશ-બાઉલીનો સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.

ડોરબીશ-બાઉલીનો સૂચક આંક $(I_{DB}) = \frac{I_L + I_P}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} + \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}\right] \times 100$$

ફિશરનું સૂત્ર

લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકના ગુણોત્તર મધ્યકને ફિશરનો સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે.

ફિશરનો સૂચક આંક $(I_F) = \sqrt{I_L \times I_p}$

$$= \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$$

ફિશરના સૂચક આંકને નીચેના કારણોસર આદર્શ સૂચક આંક કહેવામાં આવે છે :

(1) તેના સૂચક આંકમાં આધાર અને ચાલુ એમ બંને વર્ષના જથ્થાને ગણતરીમાં લેવામાં આવે છે.

(2) તેના સૂચક આંકની ગણતરીમાં ગુણોત્તર મધ્યકનો ઉપયોગ થાય છે, જે સૂચક આંકની રચના માટે શ્રેષ્ઠ સરેરાશ છે.

(3) આ સૂચક આંક પક્ષપાતથી મુક્ત છે. કારણ કે તે લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકમાં રહેલા દોષોને સંતુલિત કરે છે.

(4) આ સૂચક આંક બે મૂળભૂત પરીક્ષણો કાલ (સમય) વિપર્યાસ અને પદ વિપર્યાસનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ - 7 : નીચે આપેલી ખાદ્યા-ખોરાકીની ચીજવસ્તુઓના ભાવ અને વપરાશ અંગેની માહિતી પરથી વર્ષ 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2018 માટે લાસ્પેયર, પાશે, માર્શલ-એજવર્થ, ડોરબીશ-બાઉલી અને ફિશરનો સૂચક આંક શોધો.

		વર્ષ-2012		**વર્ષ-2018**	
વસ્તુ	**એકમ**	**ભાવ (₹)**	**જથ્થો**	**ભાવ (₹)**	**જથ્થો**
ઘઉં	કિલોગ્રામ	20	25 કિલોગ્રામ	30	30 કિલોગ્રામ
ચોખા	કિલોગ્રામ	45	35 કિલોગ્રામ	60	40 કિલોગ્રામ
કઠોળ	કિલોગ્રામ	60	3 કિલો ગ્રામ	80	4 કિલોગ્રામ
દૂધ	લીટર	36	200 લીટર	44	300 લીટર

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષનો ભાવ p_0 અને q_0, ચાલુ વર્ષનો ભાવ p_1 અને q_1 તરીકે લઈશું.

વસ્તુ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_oq_o	p_1q_o	p_oq_1	p_1q_1
ઘઉં	20	25	30	30	500	750	600	900
ચોખા	45	35	60	40	1575	2100	1800	2400
કઠોળ	60	3	80	4	180	240	240	320
દૂધ	36	200	44	300	7200	8800	10800	13200
કુલ					9455	11890	13440	16820

લાસ્પેયરનો સૂચક આંક (I_L) $= \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

$$= \frac{11890}{9455} \times 100$$

$$= 1.2575 \times 100$$

$$= 125.75$$

પાશે સૂચક આંક (I_P) $= \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$

$$= \frac{16820}{13440} \times 100$$

$$= 1.2515 \times 100$$

$$= 125.15$$

માર્શલ-એજવર્થ સૂચક આંક (I_{ME})

$$= \frac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{11890 + 16820}{9455 + 13440} \times 100$$

$$= \frac{28710}{22895} \times 100$$

$$= 125.40$$

ડોરબીશ-બાઉલી સૂચક આંક (I_{DB}) $= \frac{I_L + I_P}{2}$

$$= \frac{125.75 + 125.15}{2}$$

$$= 125.45$$

ફિશરનો સૂચક આંક (I_F) $= \sqrt{I_L \times I_p}$

$$= \sqrt{125.75 \times 125.15}$$

$$= 125.45$$

ઉદાહરણ - 8 : નીચે આપેલી માહિતી પરથી 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2018 માટે આદર્શ સૂચક આંક શોધો.

		જથ્થો		**ભાવ (₹)**	
વસ્તુ	**એકમ**	**2012**	**2018**	**2012**	**2018**
A	મીટર	20 મીટર	30 મીટર	20	25
B	ડઝન	18 નંગ	24 નંગ	24	36
C	ક્વિન્ટલ	40 કિલોગ્રામ	30 કિલોગ્રામ	1500	1800
D	કિલોગ્રામ	2000 ગ્રામ	2800 ગ્રામ	100	120
E	20 કિલોગ્રામ	12 કિલોગ્રામ	24 કિલોગ્રામ	200	280

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષ 2012 અને ચાલુ વર્ષ 2018 છે, તેથી વર્ષ 2012નો ભાવ p_0 અને જથ્થો q_0, વર્ષ 2018નો ભાવ p_1 અને જથ્થો q_1 લઈશું. અહીં વસ્તુ B માટેના ભાવ પ્રતિ ડઝન પ્રમાણે છે. જ્યારે વપરાશના જથ્થાનો એકમ નંગ છે. તેથી ભાવને પ્રતિ નંગમાં ફેરવીશું

તેથી વર્ષ 2012નો નંગ દીઠ ભાવ $= \frac{24}{12} =$ ₹ 2 અને વર્ષ 2018નો નંગ દીઠ ભાવ $= \frac{36}{12} =$ ₹ 3 થશે.

વસ્તુ C માટેનો ભાવ પ્રતિ ક્વિન્ટલ છે જ્યારે વપરાશના જથ્થાનો એકમ કિલોગ્રામ છે. તેથી ભાવને પ્રતિ કિલોગ્રામમાં ફેરવીશું. તેથી વર્ષ ૨૦૧૨નો કિલોગ્રામ દીઠ ભાવ $= \frac{1500}{100} =$ ₹ 15 અને 2018નો કિલોગ્રામ દીઠ ભાવ $= \frac{1800}{100} =$ ₹ 18 થશે.

વસ્તુ D માટેનો ભાવ પ્રતિ કિલોગ્રામ છે જ્યારે વપરાશના જથ્થાનો એકમ ગ્રામ છે. તેથી જથ્થાને કિલોગ્રામમાં ફેરવવું યોગ્ય રહેશે. તેથી વર્ષ ૨૦૧૨નો જથ્થો $= \frac{2000}{1000} = 2$ કિલોગ્રામ તથા વર્ષ ૨૦૧૮નો જથ્થો $= \frac{2800}{1000} = 2.8$ કિલોગ્રામ થશે.

વસ્તુ E માટેનો ભાવ પ્રતિ ૨૦ કિલોગ્રામ છે ત્યારે વપરાશના જથ્થાનો એકમ કિલોગ્રામ છે. તેથી ભાવને પ્રતિ કિલોગ્રામમાં ફેરવીશું. તેથી વર્ષ ૨૦૧૨નો કિલોગ્રામ દીઠ ભાવ $= \frac{200}{20}$ $=$ ₹ 10 અને વર્ષ 2018નો કિલોગ્રામ દીઠ ભાવ $= \frac{280}{20} =$ ₹ 14 થશે.

		વર્ષ 2012		**વર્ષ 2018**					
વસ્તુ	**એકમ**	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	મીટર	20	20	25	30	400	500	600	750
B	નંગ	2	18	3	24	36	54	48	72
C	કિલોગ્રામ	15	40	18	30	600	720	450	540
D	કિલોગ્રામ	100	2	120	2.8	200	240	280	336
E	કિલોગ્રામ	10	12	14	24	120	168	240	288
કુલ						1356	1682	1618	1986

આદર્શ સૂચક આંક એટલે ફિશરનો સૂચક આંક

rVph hLkkuNkf f y kf $(I_F) = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{1682}{1356} \times \frac{1986}{1618}} \times 100$$

$$\therefore I_F = 123.39$$

ઉદાહરણ - 9 : ચાર ભિન્ન વસ્તુઓની માહિતી નીચે મુજબ આપેલ છે. વર્ષ 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2015 માટે લાસ્પેયર અને પાશેનો સૂચક આંક ગણો અને તેના પરથી ફિશરનો સૂચક આંક મેળવો.

	2012		**2015**	
વસ્તુ	**ભાવ (₹)**	**કુલ ખર્ચ**	**વપરાશ**	**કુલ ખર્ચ**
I	10	60	5 કિગ્રા	75
II	12	120	10 લિટર	150
III	18	90	3 કિગ્રા	81
IV	8	40	4 મીટર	48

જવાબ : વર્ષ 2012 માટે વસ્તુઓના ભાવ અને કુલ ખર્ચ આપેલ છે.

$\therefore$ વસ્તુઓનો જથ્થો $= \dfrac{\text{વસ્તુનો કુલ ખર્ચ}}{\text{વસ્તુનો એકમ દીઠ ભાવ}}$

અને વર્ષ 2015 માટે વસ્તુઓના વપરાશ અને કુલ ખર્ચ આપેલ છે.

$\therefore$ વસ્તુઓનો એકમ દીઠ ભાવ $= \dfrac{\text{વસ્તુનો કુલ ખર્ચ}}{\text{વસ્તુનો વપરાશનો જથ્થો}}$

ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી નીચેનું કોષ્ટક મેળવીશું.

	2012			**2015**				
વસ્તુ	p_0	p_0q_0	$q_0 = \dfrac{p_0q_0}{p_0}$	q_1	p_1q_1	$q_1 = \dfrac{p_1q_1}{p_1}$	p_1q_0	p_0q_1
I	10	60	6	5	75	15	90	50
II	12	120	10	10	150	15	150	120
III	18	90	5	3	81	27	135	54
IV	8	40	5	4	48	12	60	32
કુલ		310			354		435	256

લાસ્પેયરનો સૂચક આંક $= \dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

$= \dfrac{435}{310} \times 100$

$\therefore I_L = 140.32$

પાશેનો સૂચક આંક $= \dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$

$$= \frac{354}{256} \times 100$$

$$\therefore I_P \quad = 138.28$$

ફિશરનો સૂચક આંક $= \sqrt{I_L \times I_P}$

$$= \sqrt{140.52 \times 138.28}$$

$$\therefore I_F \quad = 139.30$$

4.7 સૂચક આંકના પરીક્ષણો

સૂચક આંક માટે ઘણા સૂત્ર આપણે જોયા પરંતુ દરેક સૂત્રમાં કોઈ ને કોઈ દોષ રહેલ છે. તેથી જે સૂચક આંક અમુક ગાણિતિક પરીક્ષણોનું સમાધાન કરે તેને યોગ્ય સૂચક આંક કહેવાય છે.

સૂચક આંકનો યોગ્યતા ચકાસવા માટે મુખ્ય બે પરીક્ષણો છે.

(1) કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણ (Time Reversal Test) : આ નિયમાનુસાર આધાર વર્ષને આધારે રચિત ચાલુ વર્ષના સૂચક આંકની કિંમત અને ચાલુ વર્ષને આધાર તરીકે લઈ રચેલા આધાર વર્ષના સૂચક આંકની કિંમત પરસ્પરને વ્યસ્ત હોવી જોઈએ.

સરળ શબ્દોમાં, સૂચક આંકના વિવિધ સૂત્રો (P_{01})માં સમયની અદલાબદલી એટલે કે અનુગ (Suffix) 0 ની જગ્યાએ અનુગ 1 અને અનુગ 1 ની જગ્યાએ 0 કરવામાં આવે છે. હવે મૂળ સૂત્ર અને અદલાબદલી બાદ બનતા સૂત્ર (P_{10}) નો ગુણાકાર 1 થાય તો સૂચક આંકનું તે સૂત્ર કાલ વિર્યયાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણના સિદ્ધાંત અનુસાર આ બંને કિંમતો પરસ્પરને વ્યસ્ત થવી જોઈએ એટલે કે

$$P_{01} = \frac{1}{P_{10}}$$

અથવા $P_{01} \times P_{10} = 1$ થવું જોઈએ.

નોંધ : ફિશર અને માર્શલ - એજવર્થના સૂચક આંક કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણ સમાધાન કરે છે.

(2) પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણ (Factor Reversal Test) : આ નિયમાનુસાર સૂચક આંકની ગણતરીમાં કિંમત અને જથ્થાની અદલા-બદલી કરવાથી પરસ્પર વિરોધી પરિણામ ન આવવું જોઈએ અથવા કિંમત અને જથ્થાની અદલાબદલી કર્યા પહેલાંના સૂચક આંક અને તે અદલાબદલી કર્યા પછીના સૂચક આંકના ગુણાકારની કિંમત ચાલુ વર્ષના કુલ ખર્ચ અને આધાર વર્ષના કુલ ખર્ચના ગુણોત્તર જેટલી થવી જોઈએ. એટલે કે,

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

નોંધ : ફિશરનો સૂચક આંક પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ - 10 : નીચેની માહિતી પરથી ફિશરના સૂચક આંકની ગણતરી કરો અને તે બંન્ને પરીક્ષણોનું સમાધાન કરે છે કે કેમ તે તપાસો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ	કિંમત	જથ્થો	કિંમત	જથ્થો
ખોરાક	800	200	900	200
કપડાં	1000	60	1200	100
ભાડું	4000	1	5000	1
બળતણ	800	3	1000	5

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષની કિંમત p_0 અને જથ્થો q_0, ચાલુ વર્ષની કિંમત p_1 અને જથ્થો q_1 લઈશું.

વસ્તુ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
ખોરાક	800	200	900	200	160000	180000	160000	180000
કપડાં	1000	60	1200	100	60000	72000	100000	120000
ભાડું	4000	1	5000	1	4000	5000	4000	5000
બળતણ	800	3	100	5	2000	3000	4000	5000
કુલ					226400	260000	268000	310000

ફિશરનો સૂચક આંક $= \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{260000}{226400} \times \frac{310000}{268000}} \times 100$$

$= 115.26$

હવે આ સૂચક આંક કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે કેમ તે તપાસીએ.

અહીં, $P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} = \sqrt{\frac{260000}{226400} \times \frac{310000}{268000}} = \sqrt{1.1484 \times 1.1567} = 1.1525$

અને $P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1} \times \frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}} = \sqrt{\frac{268000}{310000} \times \frac{226400}{260000}} = \sqrt{0.8645 \times 0.8707} = 0.8676$

$\therefore P_{01} \times P_{10} = 1.1525 \times 0.8676 = 0.9999$

$\therefore P_{01} \times P_{10} \cong 1$

આમ ફિશરનો સૂચક આંક કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે.

હવે પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણ માટે તેને તપાસીએ.

$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \times \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}$

$$= \sqrt{\frac{268000}{226400} \times \frac{310000}{260000}}$$

$= \sqrt{1.1837 \times 1.1923}$

$=1.1880$

$$\therefore P_{01} \times Q_{01} = 1.1525 \times 1.1880$$

$$= 1.3692$$

હવે $\dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \dfrac{310000}{226400} = 1.3693$

$$\therefore P_{01} \times Q_{01} \cong \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

આમ, ફિશરનો સૂચક આંક પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું પણ સમાધાન કરે છે.

4.8 જીવનનિર્વાહનો સૂચક આંક

ભાવમાં થતી વધઘટને લીધે જુદાં જુદાં વર્ગના લોકોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચમાં થતા ફેરફારો માપવા અને તેનો અભ્યાસ કરવા માટે જીવનનિર્વાહ સૂચક આંકની રચના કરવામાં આવે છે. આમ કોઈ પણ એક વર્ગના જીવનનિર્વાહના ખર્ચમાં આધાર વર્ષની સરખામણીમાં થતા ફેરફારને દર્શાવતા આંકને જીવનનિર્વાહનો સૂચક આંક કહેવાય છે.

જીવનનિર્વાહના સૂચક આંકની રચનામાં નીચેના મુદ્દાઓ અગત્યના છે.

સૌપ્રથમ કયા વર્ગના માણસો માટે આ સૂચક આંકની રચના કરવાની છે તે નક્કી કરવામાં આવે છે.

ત્યારબાદ નિદર્શ કૌટુંબિક બજેટ તપાસ કરવામાં આવે છે. આ તપાસ માટે યોગ્ય પ્રમાણમાં કુટુંબો લેવા જોઈએ અને જે સમયમાં અસામાન્ય ઘટનાઓ ન ઘટી હોય તેવા સમયે તપાસ કરવી જોઈએ. આ તપાસમાં જે-તે વર્ગના માણસો વડે વપરાયેલ જુદી જુદી વસ્તુઓ તેમની જાત, ભાવ અને જથ્થા વિષે માહિતી મેળવવવામાં આવે છે. આ માહિતીને મુખ્યત્વે જુદા જુદા પાંચ સમૂહો ખોરાક, કપડાં, બળતણ, ભાડું અને પરચૂરણમાં વહેંચવામાં આવે છે.

અહીં એક એ બાબત અગત્યની છે કે આપણે કુલ ખર્ચના જે પાંચ સમૂહો પાડ્યા છે તે પ્રત્યેક સમૂહમાં આવતી દરેક વસ્તુ ન લેતાં, જે તે વર્ગ માટે અગત્યની એવી અમુક જ વસ્તુઓ લેવી જોઈએ. જે વર્ગના માણસો માટે સૂચક આંકની રચના કરવાની હોય તે વર્ગના માણસો જયાં રહેતા હોય ત્યાંથી અથવા તેઓ જયાંથી ખરીદી કરતા હોય ત્યાંથી વસ્તુઓના છૂટક વેચાણ ભાવ મેળવવા જોઈએ. કૌટુંબિક બજેટની તપાસથી વપરાશમાં આવતી કઈ વસ્તુઓ કેટલી મહત્ત્વની છે તેનો ખ્યાલ આવે છે અને તેથી સૂચક આંકની રચનામાં પ્રત્યેક વસ્તુને કેટલો ભાર આપવો તે નક્કી કરી શકાય છે.

જીવનનિર્વાહ સૂચક આંક શોધવાની બે રીતો છે :

(i) ભારિત સમૂહ પદ્ધતિ

(ii) સાપેક્ષ કિંમતોની ભારિત સરેરાશની પદ્ધતિ

(i) ભારિત સમૂહ પદ્ધતિ (Weighted Aggregative Method)

આ રીતમાં આધાર વર્ષમાં વસ્તુના વપરાયેલા જથ્થાનો ઉપયોગ કરી આધાર વર્ષ અને ચાલુ વર્ષમાં પ્રત્યેક વસ્તુ માટે કુલ ખર્ચ શોધવામાં આવે છે. ચાલુ વર્ષના કુલ ખર્ચ અને આધાર વર્ષના કુલ ખર્ચના ટકાવારી ગુણોત્તરને ભારિત સમૂહ પદ્ધતિથી મેળવેલ સૂચક આંક કહેવાય છે.

સૂચક આંક $(I) = \dfrac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$

જ્યાં p_0 = આધાર વર્ષનો ભાવ

q_0 = આધાર વર્ષનો જથ્થો

p_1 = ચાલુ વર્ષનો ભાવ

q_1 = ચાલુ વર્ષનો જથ્થો

આ રીતને કુલ ખર્ચની રીત (Total Expenditure Method) પણ કહેવાય છે.

(ii) સાપેક્ષ કિંમતોની ભારિત સરેરાશ

આ રીતમાં ચાલુ વર્ષની કિંમતોની આધાર વર્ષના પ્રમાણમાં સાપેક્ષ કિંમતો શોધવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ દરેક વસ્તુનું આધાર વર્ષનું ખર્ચ શોધી તેને ભાવ સાપેક્ષના ભાર તરીકે ગણી ભારિત સરેરાશ સૂચક આંક મેળવવામાં આવે છે.

સૂચક આંક $(I) = \frac{\sum IW}{\sum W}$

જ્યાં,

I = પ્રત્યેક વસ્તુની સાપેક્ષ ટકાવારી $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$

અને W = ભાર = $p_0 q_0$

આ રીતને કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીત (Family Budget Method) પણ કહેવાય છે.

નોંધ : કુલ ખર્ચની રીતે અને કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે મળતાં સૂચક આંક સમાન હોય છે.

ઉદાહરણ - 11 : ભારિત સમૂહ પદ્ધતિ કૌટુંબિક બજેટની રીતે ધંધાકીય પ્રવૃત્તિઓનો સૂચક આંક મેળવો.

સમૂહ	**સૂચક આંક**	**ભાર**
ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન	250	35
ખનીજ ઉત્પાદન	135	8
આંતરિક વેપાર	200	25
નાણાકીય પ્રવૃત્તિ	135	20
નિકાસ અને આયાત	325	6
શિપિંગ પ્રવૃત્તિ	300	6

જવાબ : અહીં જુદા જુદા સમૂહના સૂચક આંક અને તેમના ભાર આપેલા છે.

સમૂહ	**સૂચક આંક (I)**	**ભાર (W)**	**IW**
ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન	250	35	8750
ખનીજ ઉત્પાદન	135	8	1080
આંતરિક વેપાર	200	25	5000
નાણાંકીય પ્રવૃત્તિ	135	20	2700
વિકાસ અને આયાત	325	6	1950
શિપિંગ પ્રવૃત્તિ	300	6	1800
કુલ		100	21280

સૂચક આંક $= \frac{\sum IW}{\sum W}$

$$= \frac{21280}{100}$$

$$= 212.80$$

ઉદાહરણ - 12 : નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2016ને આધારે વર્ષ આઠનો કુલ ખર્ચની રીત અને કૌટુંબિક બજેટની સૂચક આંક મેળવો.

			ભાવ (₹)	
વસ્તુ	**વર્ષ 2012નો જથ્થો**	**એકમ**	**2012**	**2016**
A	200 કિ.ગ્રા.	કિ.ગ્રા.	40	48
B	50 કિ.ગ્રા.	કિ.ગ્રા.	120	140
C	50 કિ.ગ્રા.	કિ.ગ્રા.	160	200
D	20 લીટર	લીટર	200	300
E	40 લીટર	લીટર	25	50

જવાબ : અહીં આધાર વર્ષ 2012 છે. તેથી p_0 = 2012નો ભાવ, q_0 = 2012 નો જથ્થો અને p_1 = 2016ના વર્ષનો ભાવ લઈશું.

કુલ ખર્ચની રીત

	2012		**2016**		
વસ્તુ	**જથ્થો (q_0)**	**ભાવ (p_0)**	**ભાવ (p_1)**	**p_1q_0**	**p_0q_0**
A	200	40	48	9600	8000
B	50	120	140	7000	6000
C	50	160	200	10000	8000
D	20	200	300	6000	4000
E	40	25	50	2000	1000
				34600	27000

સૂચક આંક $= \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

$$= \frac{34600}{27000} \times 100$$

$$= 128.15$$

કૌટુંબિક બજેટ (અંદાજપત્ર)ની રીત

	2012		2016	$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	$W = p_0 q_0$	IW
વસ્તુ	જથ્થો (q_0)	ભાવ (p_0)	ભાવ (p_1)			
A	200	40	48	120	8000	960000
B	50	120	140	116.67	6000	700020
C	50	160	200	125	8000	1000000
D	20	200	300	150	4000	600000
E	40	25	50	200	1000	200000
કુલ					27000	34,60020

સૂચક આંક $= \frac{\sum IW}{\sum W}$

$= \frac{3460020}{27000}$

$= 128.15$

સ્વાધ્યાય

Q-1 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

1. સૂચક આંક કોને કહેવાય છે ? તેના ઉપયોગો જણાવો.
2. સૂચક આંકના લક્ષણો જણાવો.
3. સૂચક આંકની રચનાને લગતા મુદ્દાઓ સ્પષ્ટ રીતે સમજાવો.
4. ''સૂચક આંકને આર્થિક ફેરફારોની પારાશીશી તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.'' આ વિધાનને સમજાવો.
5. આધાર વર્ષ એટલે શું ? તેની પસંદગીમાં મુખ્ય કઈ બાબતો ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ ?
6. સૂચક આંકની રચનામાં ભાર એટલે શું ? ભારના પ્રકાર જણાવો.
7. જીવનનિર્વાહના સૂચક આંકનો અર્થ સમજાવી તેની રચના કરતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવાના મુદ્દા જણાવો.
8. ફિશરના સૂચક આંકને આદર્શ સૂચક આંક શા માટે કહે છે ?
9. સૂચક આંકની યોગ્યતા માટેના પરીક્ષણો સમજાવો.
10. જથ્થા સૂચક આંક એટલે શું ?

Q-2 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

1. સૂચક આંકની વ્યાખ્યા આપો.
2. ભાવ સાપેક્ષ એટલે શું ?
3. જીવનનિર્વાહ સૂચક આંકની વ્યાખ્યા આપો.

4. સ્પષ્ટ ભાર અને ગર્ભિત ભાર વચ્ચેનો તફાવત જણાવો.

5. કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણ અને પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણના સૂત્ર જણાવો.

Q-3 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. એક વસ્તુ માટે જથ્થાનો 2018નો સૂચક આંક 230 હોય તો તેનું અર્થઘટન કરો.

2. એક વસ્તુનો ભાર આધાર વર્ષની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષમાં 3.5 ગણો વધે છે તો ભાવ સૂચક આંક કેટલો થશે ?

3. જો આધાર વર્ષ 2012ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2018માં નાણાંની ખરીદ શક્તિ 0.6 હોય તો વર્ષ 2018 માટે ભાવનો સૂચક આંક કેટલો હશે ?

4. જો $I_L = 115.92$ અને $I_p = 115.68$ હોય તો I_F મેળવો.

5. જો $\sum p_1q_0 : \sum p_0q_0 = 4:3$ અને $\sum p_1q_1 : \sum p_0q_1 = 3:2$ હોય તો I_F શોધો.

Q-4 નીચેનાના ઉકેલ મેળવો.

1. ચાર વસ્તુઓના 2012 અને 2018માં એકમ દીઠ ભાવ (₹) નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે. 2012ને આધાર વર્ષ લઈ ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક મેળવો.

વસ્તુના એકમ દીઠ ભાવ		
વસ્તુ	**2012**	**2018**
I	20	23
II	10	14
III	3.50	4.50
IV	70	95

2. કોઈ એક કંપનીનું વર્ષ 2010 થી 2016 સુધીનું વેચાણ અંગેની નીચે મુજબની માહિતી પરથી અચલ આધારની રીતે વર્ષ 2010ને આધાર વર્ષ લઈ સૂચક આંક શોધો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
વેચાણ (કરોડ (₹))	140	148	152	160	168	176	183

3. એક કંપનીના એક માર્કેટિંગ એક્ઝિક્યુટીવનું જાન્યુઆરી 2018 થી ડિસેમ્બર 2018ના વેચાણ અંગેની માહિતી પરથી પરંપરિત આધારે સૂચક આંક ગણો.

મહિનો	જાન્યુઆરી	ફેબ્રુઆરી	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જુન	જુલાઈ	ઓગષ્ટ	સપ્ટેમ્બર	ઑક્ટોબર	ડિસેમ્બર
વેચાણ (હજાર (₹))	80	75	85	89	93	100	110	95	98	100	115

4. એક વસ્તુના ભાવ અંગેની નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2010, 2011 અને 2012ના સરેરાશ ભાવને આધાર વર્ષનો ભાવ લઈ અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક તૈયાર કરો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ભાવ (₹)	30	35	34	39	40	42	39	45	48

5. એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થતી ત્રણ અલગ-અલગ વસ્તુના 2012 થી 2018 સુધીના નફાની માહિતી નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી સમાંતર સરેરાશનો ઉપયોગ કરી

(i) અચલ આધારની રીતે (2012ને આધાર વર્ષ લેવું)

(ii) પરંપરિત આધારની રીતે નફાના સામાન્ય સૂચક આંક શોધો.

નફો (લાખ ₹માં.)							
વસ્તુ	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
I	50	48	55	60	58	62	65
II	60	62	65	70	72	75	80
III	80	82	75	78	75	82	82

6. નીચેની માહિતી પરથી સાદી સાપેક્ષ કિંમતોની સરેરાશની રીતે તથા સાદી સરેરાશના ગુણોત્તરની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

વસ્તુ	ભાવ	
	આધાર વર્ષ	ચાલુ વર્ષ
I	30	33
II	40	35
III	50	55
IV	14	18
V	10	8

7. નીચેની માહિતી પરથી સાદા સાપેક્ષ કિંમતોની સાદી સરેરાશની રીતે 2015ને આધાર વર્ષ લઈ 2018 માટે સૂચક આંક મેળવો.

	વસ્તુ	I	II	III	IV
ભાવ	2015	140	80	150	100
(₹)	2018	120	90	180	80

8. નીચેની માહિતી પરથી 2012ને આધાર વર્ષ ગણી 2018નો સાપેક્ષ કિંમતોની ભારિત સરેરાશની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

		ભાવ (₹)	
વસ્તુ	ભાર	2012	2018
A	25	8	10
B	35	15	20
C	10	20	18
D	15	40	44
E	15	50	50

9. નીચેની માહિતી પરથી 2015ને આધાર વર્ષ ગણી 2018નો ભારિત કિંમતોની સરેરાશનો ગુણોત્તરની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

	ભાવ (₹)		
વસ્તુ	2015	2018	ભાર
I	80	100	2
II	70	50	5
III	40	80	3

10. નીચે આપેલી માહિતી પરથી 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ 2018 માટે લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરનો સૂચક આંક ગણો.

	2012		2018	
વસ્તુ	ભાવ (₹)	જથ્થો	ભાવ (₹)	જથ્થો
A	42	25 કિ.ગ્રા.	45	32 કિ.ગ્રા.
B	28	15 લીટર	30	20 લીટર
C	30	10 નંગ	36	20 નંગ
D	60	30 મીટર	65	36 મીટર

11. પાંચ જુદી જુદી વસ્તુઓ અંગે નીચે આપેલ માહિતી પરથી વર્ષ 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ 2016 માટે આદર્શ સૂચક આંક મેળવો.

		2012		2016	
વસ્તુ	એકમ	ભાવ (₹)	જથ્થો	ભાવ (₹)	જથ્થો
A	20 કિ.ગ્રા.	600	5 કિ.ગ્રા.	800	10 કિ.ગ્રા.
B	કિ.ગ્રા.	50	1200 કિ.ગ્રા.	75	1800 કિ.ગ્રા.
C	લીટર	60	30 લીટર	50	20 લીટર
D	મીટર	20	50 મીટર	40	80 મીટર
E	ડઝન	30	20 નંગ	50	30 નંગ

12. ચાર ભિન્ન વસ્તુઓની માહિતી નીચે મુજબ આપેલ છે. વર્ષ 2012ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2018 માટે માશર્લ-એજવર્થ ડોરબીશ-બાઉલી અને ફિશરનો સૂચક આંક મેળવો.

	2012		2018	
વસ્તુ	કુલ ખર્ચ (₹)	જથ્થો	કુલ ખર્ચ (₹)	જથ્થો
I	2000	50 કિ.ગ્રા.	3000	60 કિ.ગ્રા.
II	900	30 લીટર	2400	60 લીટર
III	336	3 કિ.ગ્રા.	400	2.5 કિ.ગ્રા.
IV	40	4 નંગ	120	6 નંગ

13. નીચેની માહિતી ઉપરથી લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંક ગણો. તે બંને કાલ વિપર્યાસ અને પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે કે કેમ તે ચકાસો.

	આધાર વર્ષ		ચાલુ વર્ષ	
વસ્તુ	ભાવ	જથ્થો	ભાવ	જથ્થો
A	40	15 કિ.ગ્રા.	44	10 કિ.ગ્રા.
B	45	10 લીટર	40	15 લીટર
C	50	3 કિ.ગ્રા.	60	4 કિ.ગ્રા.
D	36	18 નંગ	48	24 નંગ

14. નીચેની માહિતી પરથી માશર્લ-એજવર્થ, ડોરબીશ-બાઉલી અને ફિશરનો સૂચક આંકની ગણતરી કરો. અને તે કાલ વિપર્યાસ અને પદ વિપર્યાસ પરીક્ષણોનું સમાધાન કરે છે કે કેમ તે ચકાસો.

	ભાવ		જથ્થો	
વસ્તુ	1985	1988	1985	1988
A	20	25	10	12
B	18	32	16	10
C	35	48	8	8
D	28	40	12	10

15. કૌટુંબિક બજેટની રીતે જીવનનિર્વાહ સૂચક આંક ગણો.

સમૂહ	સૂચક આંક	ભાર
ખોરાકી વસ્તુઓ	250	45
કાપડ	150	10
વીજળી-બળતણ	170	8
ઘરભાડું	200	12
પરચૂરણ	230	25

16. નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2012ને આધારે વર્ષ 2018નો કુલ ખર્ચની રીતે તેમજ કૌટુંબિક બજેટની રીતે જીવનનિર્વાહ સૂચક આંકની ગણતરી કરો.

	2012		2018
વસ્તુ	ભાવ (₹)	જથ્થો	ભાવ (₹)
ઘઉં	30	20 કિ.ગ્રા.	40
ચોખા	70	15 કિ.ગ્રા.	170
દાળ	50	5 કિ.ગ્રા.	70
તેલ	60	5 લીટર	100
કાપડ	30	20 મીટર	60
પેટ્રોલ	73	10 લીટર	78

Q-5 બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો :

1. આધાર વર્ષનો સૂચક આંક .... હોય.
   (a) 0 (b) 1 (c) 100 (d) અનિશ્ચિત
2. સૂચક આંકની વર્ષ પરંપરિત આધારની રીતમાં આધાર
   (a) અચળ હોય (b) નિશ્ચિત વર્ષ હોય (c) અગાઉનું વર્ષ હોય (d) 100 હોય
3. સૂચક આંકની ગણતરીમાં કઈ સરેરાશ વધુ યોગ્ય છે ?
   (a) સમાંતર મધ્યક (b) મધ્યસ્થ (c) બહુલક (d) ગુણોત્તર મધ્યક
4. કયો સૂચક આંક કાલ વિપર્યાસ પરીક્ષણનું સમાધાન કરે છે ?
   (a) લાસ્પેયર (b) ફિશર (c) માર્શલ-એજવર્થ (d) (b) અને (c) બન્ને
5. જો લાસ્પેપર સૂચક આંક = 145 અને ફિશર સૂચક આંક = 143.5 હોય તો બાઉલી સૂચક આંક શોધો.
   (a) 142 (b) 143.5 (c) 98.97 (d) 144.25

જવાબ : 1. C 2. C 3. d 4. d 5.b

સ્વાધ્યાયના જવાબ

Q.3 ના જવાબ : 2. 450, 3. 166.67, 4. I_F = 115.80, 5. I_F = 141.42

Q.4 ના જવાબ : 1. 129.82

2.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
સૂચક આંક	100	105.71	108.57	114.29	120	125.71	130.71

3. 100, 93.75, 113.33, 104.71, 105.67, 107.53, 110, 86.36, 103.16, 102.04, 115
4. 90.91, 106,06, 103.03, 118.18, 121.12, 127.27, 118.18, 136.36, 145.45
5.

(i) અચલ આધારની રીતે : 100, 100.61, 104.028, 109.92, 117.17, 121.94

(ii) પરંપતિ આધારની રીતે : 100, 100.61, 103.63, 106.93, 98.56, 106.80, 103.84

6. સાદી સાપેક્ષ કિંમતોની સરેરાશની રીત : 103.21
   સાદી સરેરાશના ગુણોત્તરની રીત : 103.47
7. 99.55, 8. 118.42, 9. 109.52
10. લાસ્પેપર સૂચક આંક = 108.82
    પાશે સૂચક આંક = 109.35
    ફિશર સૂચક આંક = 109.086
11. આદર્શ સૂચક આંક : ફિશર સૂચક આંક = 149.41

12. માશર્લ-એજવર્ધ સૂચક આંક = 130.25
    ડોરબીશ-બાઉલી સૂચક આંક = 130.22
    ફિશર સૂચક આંક = 130.22
13. લાસ્પેપર સૂચક આંક = 113.85
    પારો સૂચક આંક = 113.70
14. માર્શલ-એજવર્ધ સૂચક આંક = 145.39
    ડોરબીશ-બાઉલી સૂચક આંક = 145.27
    ફિશર સૂચક આંક = 145.26
15. 222.6
16. 175.071

એકમ 5 સામાયિક શ્રેણી

5.1 પ્રસ્તાવના

વ્યવહારમાં સમયની સાથે વિવિધ બાબતોની માહિતીમાં સતત ફેરફાર થતો રહેતો હોય છે. સમયની સાથે બદલાતી ચલ કિંમતો વિશેની માહિતીનો અભ્યાસ આપણે આ પ્રકરણમાં કરીશું. મોટા ભાગના આર્થિક ચલો જેવા કે ચીજ વસ્તુના ભાવ, ઉત્પાદન, માંગ, બેરોજગારીના આંકડા, દેશની વસ્તી, વેચાણથી થતો નફો, જાહેર કંપનીઓના શેરના ભાવ, આયાત-નિકાસના આંકડા વગેરેમાં સમયની સાથે ફેરફાર થતો જોવા મળે છે. સમય આધારિત બદલાતા ચલની માહિતી કે શ્રેણીને સામાયિક શ્રેણી કહેવાય છે. ભવિષ્યમાં આ પ્રકારના સામાયિક ચલોની કિંમતનું પૂર્વાનુમાન કરવા માટે સામાયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ ખૂબ ઉપયોગી નીવડે છે.

5.2 સામાયિક શ્રેણીનો અર્થ

સમય અનુસાર ગોઠવવામાં આવતી આંકડાકીય માહિતીને સામાયિક શ્રેણી કહેવાય છે. સામાન્ય રીતે સમાન સમયગાળાના અંતરે આ પ્રકારની માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવે છે. જરૂરિયાત મુજબ સમય આધારિત ચલની માહિતી દૈનિક, અઠવાડિક, માસિક, ત્રિમાસિક, વાર્ષિક કે તેથી વધુ સમયના અંતરે એકઠી કરવામાં આવે છે. આ પ્રકારના સામાયિક ચલોની લાંબા ગાળાની માહિતી પરથી ભવિષ્યમાં તે ચલની કિંમત શું થશે તેનું પૂર્વાનુમાન મેળવી શકાય છે.

દા.ત. કોઈ વિસ્તારના વરસાદના આંકડા દર્શાવતી સામયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ કરવાથી તેમાં થતા ફેરફારોની દિશા અને તેમાં થતા ફેરફારોનું પ્રમાણ જાણી શકાય છે. તેને આધારે તે પછીના સમયમાં તે વિસ્તારમાં કેવા પ્રકારનો વરસાદ પડી શકે તેનું અનુમાન મેળવી તેને અનુરૂપ ખેતી વિષયક બાબતો અંગે નિર્ણય, સિંચાઈની પદ્ધતિ, વરસાદ આધારિત આપત્તિનું આયોજન વગેરે અંગે સમયસર નિર્ણય લઈ શકાય છે.

ક્રોક્ષ્ટન અને કાઉડનના મતાનુસાર ''સમયના ક્રમિક અંતરે ગોઠવેલી માહિતી એટલે સામાયિક શ્રેણી.''

સામાન્ય રીતે સમાન સમયાંતરે અવલોકનો લેવામાં આવે છે, તેથી સામાયિક શ્રેણીને નીચે મુજબ ગાણિતીય રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.

જો 'સમય'ને નિરપેક્ષ ચલ t વડે અને તેને અનુરૂપ સાપેક્ષ ચલને y_t વડે દર્શાવીએ તો t ની જુદી જુદી કિંમતો 1, 2, 3, ..., n માટે મળતી y_t ની કિંમતો $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ ને સામયિક શ્રેણી કહેવાય.

સરળતા ખાતર આપણે y_t ને ફક્ત y વડે દર્શાવીશું.

5.3 સામાયિક શ્રેણીના ઉપયોગો

અર્થશાસ્ત્ર, સમાજશાસ્ત્ર, વેપાર વાણિજ્ય વગેરેમાં મળતી મોટાભાગની માહિતી સામાયિક શ્રેણી સ્વરૂપમાં હોય છે.તેમાં થતા ફેરફારો અનેક પરિબળોને આધિન હોય છે. તેથી તેનું યોગ્ય પૃથક્કરણ જરૂરી છે. જેના દ્વારા સામાયિક ચલ વિશેના ભવિષ્યના સચોટ અનુમાન મેળવી શકાય છે. સામાયિક શ્રેણીના અભ્યાસના કેટલાક મહત્વના ઉપયોગો નીચે મુજબ છે.

(1) ચલની કિંમતોમાં થતા ફેરફારનો પ્રકાર અને માત્રા ભૂતકાળના આંકડા પરથી જાણી શકાય છે.

(2) ભૂતકાળ અને વર્તમાનની કિંમતો પરથી આંકડાશાસ્ત્રીય રીતો દ્વારા ભવિષ્યની કિંમતનું યોગ્ય અનુમાન થઈ શકે છે.

(3) બે જુદી જુદી સામયિક શ્રેણીનો તુલનાત્મક અભ્યાસ કરી અગત્યના તારણો મેળવી શકાય છે.

(4) ભવિષ્યની કિંમતના યોગ્ય અનુમાનનો ઉપયોગ કરી કાર્યનું આગોતરુ આયોજન કરી શકાય છે.

(5) લાંબાગાળાના નીતિવિષયક નિર્ણયો લેવા માટે અને સમાજના વિકાસ માટેની યોજનાઓ તૈયાર કરવા માટે સામાયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ ઉપયોગી નીવડે છે.

(6) કેટલાંક સામાજિક પ્રશ્નો જેવા કે બાળલગ્નો, જાતિ-અસમાનતા, આપઘાત, સોશિયલ મિડીયાના વધુ ઉપયોગથી દંપતિ વચ્ચે વધતા અણબનાવો વગેરેને લગતી માહિતી પરથી સામાજિક સુધારા કરવા માટે સમાજશાસ્ત્રીઓને સામાયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ ખૂબ જ ઉપયોગી નીવડે છે.

5.4 સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ અને તેનાં ઘટકો

સામાયિક શ્રેણીમાં થતા ફેરફારો વિવિધ પરિબળોને લીધે થાય છે. આ પરિબળો નિયમિત, અનિયમિત કે બિલકુલ કલ્પી ન શકાય તેવા હોય છે. સામાયિક શ્રેણીને અસર કરતાં આ વિવિધ પરિબળોને અલગ તારવી તેનું માપન કરવાની પ્રક્રિયાને સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ કહે છે.

સામાયિક શ્રેણીના યોગ્ય સ્વરૂપને જાણવા માટે તેમાં થતી વધઘટોને મુખ્યત્વે ચાર ઘટકોમાં વિભાજીત કરવામાં આવે છે.

(1) વલણ અથવા દીર્ઘકાલીન વધઘટ

(2) મોસમી વધઘટ

(3) ચક્રિય વધઘટ

(4) અનિયમિત અથવા યાદચ્છિક વધઘટ

સામાયિક શ્રેણીનું વિઘટન કરી પ્રત્યેક ઘટકની અસરનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. વિવિધ ઘટકો વચ્ચે કોઈ ચોક્કસ પ્રકારનો સંબંધ જોવા મળે છે. તેના આધારે સામાયિક શ્રેણીના પૃથક્કરણ માટે યોગનીય (Addilive) મોડલ અથવા ગુણકીય (Multiplicative) મોડલનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જ્યારે બધાં જ ઘટકો એકબીજાથી સ્વતંત્ર હોય ત્યારે યોગનીય મોડલ અને સ્વતંત્ર ન હોય અને ઘટકોની અસર ગુણકીય હોય ત્યારે ગુણકીય મોડલનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

આપણે સામાયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ યોગનીય મોડલ પૂરતો સીમિત રાખીશું.

વલણને 'T', વડે મોસમી વધઘટને 'S' વડે, ચક્રિય વધઘટને 'C' વડે અને અનિયમિત વધઘટને 'I' વડે દર્શાવીએ તો સામાયિક શ્રેણીનું યોગનીય મોડલ નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

$y = T + S + C + I$

હવે આપણે વિગતવાર પ્રત્યેક ઘટક વિશે અભ્યાસ કરીશું.

(1) વલણ અથવા દીર્ઘકાલીન વધઘટ

સામાયિક શ્રેણીના ચલ પર લાંબા ગાળે અસર કરતા પરિબળોને લીધે થતી વધઘટને દીર્ઘકાલીન વધઘટ અથવા વલણ કહે છે. સમયના અલ્પગાળામાં ચલની કિંમતોમાં વધઘટ થતી રહે છે પરંતુ લાંબાગાળે સામાયિક ચલની કિંમતો એકંદરે વધતું, ઘટતું કે સ્થિર વલણ ધરાવે છે. વલણ એ સામાયિક ચલના ચલનની દિશા તથા તેના સ્વરૂપ (ગાણિતિક)નો ખ્યાલ દર્શાવતો ઘટક છે. દા.ત. દેશની વસ્તીનો વધારો, મૃત્યુદરમાં થતો ઘટાડો, રૂપિયાનું અવમૂલ્યન, મોબાઈલ ફોનમાં સોશિયલ મિડીયાનો વધતો વપરાશ, બેકારીનું પ્રમાણ વગેરેની અસરો લાંબાગાળાની માહિતી પરથી જ જાણી શકાય છે. સામાન્ય રીતે લાંબાગાળાના ફેરફારો સામાજિક પ્રણાલીઓમાં થતા ફેરફારો, લોકોની પસંદગીમાં થયેલ ફેરફારો, બદલાતી ટેક્નોલોજી વગેરેને આભારી હોય છે.

સામાયિક શ્રેણીમાં ''લાંબા ગાળા''નો અર્થ એક સાપેક્ષ ખ્યાલ છે. કઈ સામાયિક શ્રેણીનો અભ્યાસ કરવો છે, તે બાબત પર ''લાંબો ગાળો'' એટલે કેટલો સમય, તે નિર્ભર છે.

સામાન્ય રીતે આર્થિક ચલો જેવા કે ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન, વસ્તુનાં ભાવ, વેચાણ, ખેત પેદાશો વગેરે માટે 10 થી 15 વર્ષનો ગાળો લાંબો કહી શકાય. પરંતુ ખગોળશાસ્ત્રીઓ માટે કોઈ અવકાશી પદાર્થના ભ્રમણ કે ગતિ અંગેના અભ્યાસમાં સેંકડો વર્ષ પણ 'લાંબો ગાળો' ન હોય તેવુ બની શકે. હોટલના વ્યવસાય માટે કદાચ 5 થી 7 વર્ષ પણ લાંબો ગાળો કહી શકાય. જ્યારે મેલેરિયાના તાવના દર્દીના શરીરના તાપમાનની સામાયિક શ્રેણી માટે 4 થી 5 દિવસનો ગાળો પણ લાંબો ગણાય.

વલણ વધતું, ઘટતું કે સ્થિર હોઈ શકે. જીવનજરૂરી વસ્તુના ભાવ, પ્રતિષ્ઠિત કંપનીની વસ્તુનું વેચાણ, વિકાસશીલ દેશનો આર્થિક વૃદ્ધિદર, વગેરે ચલની કિંમતો લાંબા ગાળે એકંદરે વધતી જોવા મળે છે. આવા વલણને વધતું વલણ કહેવાય. વિકાસશીલ દેશોમાં બેકારીનું પ્રમાણ, મૃત્યુદર, વિકસીત દેશોમાં બેંકના વ્યાજદર, ઇલેક્ટ્રોનિક ચીજ વસ્તુના ભાવ વગેરે ચલની કિંમતોમાં લાંબા ગાળે એકંદરે ઘટાડો જોવા મળે છે. આવા વલણને ઘટતું વલણ કહેવાય. જ્યારે સામાયિક ચલની કિંમતોમાં લાંબાગાળે કોઈ નોંધપાત્ર વધારો કે ઘટાડો નિરંતર જોવા ન મળે તો તેને સ્થિર વલણ કહેવાય. દા.ત. સામાન્ય વ્યક્તિના મિનિટદીઠ ધબકારા, કોઈ જગ્યાનું દૈનિક સરેરાશ તાપમાન, વિકસિત દેશોમાં જન્મદર વગેરે.

જે શ્રેણીમાં વધારો કે ઘટાડો લગભગ અચળ પ્રમાણમાં રહેતો હોય તો તેવા વલણને સુરેખ વલણ કહેવાય છે,પણ જો તે અચળ ન હોય તો તેવા વલણને વક્રીય અથવા અસુરેખ વલણ કહેવાય છે.

સામાયિક શ્રેણીના દીર્ઘકાલીન વધઘટ વલણના અભ્યાસથી ભવિષ્યનું પૂર્વાનુમાન થઈ શકે છે.

(2) મોસમી વધઘટ :

સમયના ટૂંકા ગાળામાં નિયમિત વધઘટ જોવા મળે તો તે મોસમી વધઘટ કહેવાય છે. મોસમી વધઘટની અસર જાણવા માટે માહિતી દૈનિક, અઠવાડિક, માસિક, ત્રિમાસિક હોય તો જ તે શક્ય બને છે. આપણી ઋતુ, રીત રસમ તહેવારો વગેરેને લીધે ઉદ્ભવતી વધઘટ મોસમી વધઘટ હોય છે. દા.ત. શિયાળામાં ગરમ કપડાનું વેચાણ, દિવાળીના તહેવારો દરમ્યાન તૈયાર કપડા અને મિઠાઈનું વેચાણ, ઉનાળામાં ઠંડાપીણાનું વેચાણ. સામાન્ય રીતે મોસમી વધઘટના આવર્તનનો ગાળો વધુમાં વધુ 1 વર્ષ હોય છે. ઉપરોક્ત ઉદાહરણોમાં દર વર્ષે વધારો જોવા મળે છે, કેટલાંક કિસ્સામાં એક વર્ષ કરતાં ઓછો સમય પણ મોસમી વધઘટનો ગાળો હોઈ શકે. દા.ત. રેસ્ટોરન્ટની દૈનિક આમદનીની શ્રેણીનો અભ્યાસ કરીએ તો દર શનિ-રવિવારે તેની આમદનીમાં નોંધપાત્ર વધારો જણાય છે. આમ આ ઉદાહરણમાં આવર્તનનો ગાળો માત્ર એક અઠવાડિયું ગણાય. તેવી જ રીતે કોઈ ધર્મસ્થાનમાં દર્શનાર્થીઓની દૈનિક માહિતીમાં જો એમ જણાય કે દર પૂનમના દિવસે શ્રદ્ધાળુઓનો ઘસારો વધુ છે તો આ માહિતીની શ્રેણીમાં મોસમી વધઘટના આવર્તનનો સમય એક મહિનો ગણી શકાય.

આમ, વધુમાં વધુ એક વર્ષ કે તેથી ઓછા સમયે ઉદ્ભવતી નિયમિત વધઘટને મોસમી વધઘટ તરીકે ઓળખાય છે.

(3) ચક્રિય વધઘટ :

એક વર્ષથી વધારે સમયના અંતરે લગભગ નિયમિત રીતે જોવા મળતાં ફેરફારોને ચક્રિય વધઘટ કહી શકાય. મોસમી વધઘટ કરતાં ચક્રિય વધઘટના આવર્તનમાં નિયમિતતા ઓછી જોવા મળે છે. આ વધઘટોમાં દરેક આવર્તનનો ગાળો સમાન ન હોય તેવું પણ બની શકે. દા.ત. શેર બજારમાં તેજી અને મંદી એ ચક્રિય વધઘટનું ઉદાહરણ છે. તેમાં ધારો કે અગાઉનું તેજી-મંદીનું આવર્તન 4 થી 5 વર્ષ હોય તો જ્યારે નવું આવર્તન શરૂ થાય ત્યારે તે 5 થી 7 વર્ષ કે તેનાથી ઓછું પણ હોઈ શકે. આ પ્રકારની વધઘટ વેપાર ચક્રોને લીધે ઉદ્ભવે છે. કોઈ પણ વેપારચક્રના ચાર તબક્કા હોય છે, મંદી, વૃદ્ધિ, તેજી અને પડતી. વસ્તુઓના ભાવ ઉત્પાદન વેચાણ શેરના ભાવો વગેરેની શ્રેણીમાં વેપાર ચક્રોની અસર જોવા મળે છે ચક્રિય વધઘટ પણ મોસમી વધઘટની જેમ વલણની સરખામણીએ ઓછો આવર્તન સમય ધરાવતી હોઈ તેને અલ્પકાલીન વધઘટ ગણી શકાય.

(4) અનિયમિત વધઘટ અથવા યાદચ્છિક વધઘટ :

જે વધઘટોને વલણ, મોસમી વધઘટ કે ચક્રિય વધઘટ ન કહી શકાય તેવી વધઘટોને અનિયમિત વધઘટ અથવા યાદચ્છિક વધઘટ કહી શકાય. સામાયિક શ્રેણીમાં કોઈ દેખીતા ચોક્કસ કારણો વગર કોઈ આકસ્મિક, અણધાર્યા ફેરફારો થાય તો તે અનિયમિત વધઘટની અસર કહી શકાય. દા.ત. ફેક્ટરીમાં હડતાળને લીધે ઉત્પાદનમાં થતો ઘટાડો, ધરતીકંપને લીધે બહુમાળી મકાનોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો, રોગચાળા વખતે દવાનું વેચાણ વગેરે અનિયમિત વધઘટના ઉદાહરણો છે. આ વધઘટોની આગાહી બિલકુલ અશક્ય છે કેમ કે તે તદ્દન અનિયમિત અને આકસ્મિક ઉદ્ભવે છે અને તેથી જ અનિયમિત વધઘટને અંકુશ કરી શકાતી નથી.

અનિયમિત વધઘટને બાદ કરતાં બાકીની ત્રણેય વધઘટમાં થોડી નિયમિતતાનું પ્રમાણ રહેલું છે તેથી અનિયમિત વધઘટની અસર જાણવા માટે અન્ય વધઘટો શોધી તેની અસરોને મૂળ શ્રેણીમાંથી નાબૂદ કરવામાં આવે છે.

સામાયિક શ્રેણીના પૃથક્કરણનો મુખ્ય હેતુ ભવિષ્યની કિંમતનું અનુમાન કરવાનો છે, પરંતુ અનિયમિત વધઘટની હાજરીને લીધે તેમાં ભૂલ (ત્રુટિ) થવાની સંભાવના રહેલી છે.

હવે આપણે સામાયિક શ્રેણીના પૃથક્કરણના પ્રારંભના પગથિયા તરીકે વલણ શોધવાની રીતોનો અભ્યાસ કરીશું.

5.5 વલણના માપનની રીતો

આપણે વલણ માપવા માટેની નીચેની ત્રણ રીતોનો અભ્યાસ કરીશું.

(1) આલેખની રીત

(2) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

(3) ચલિત સરેરાશની રીત

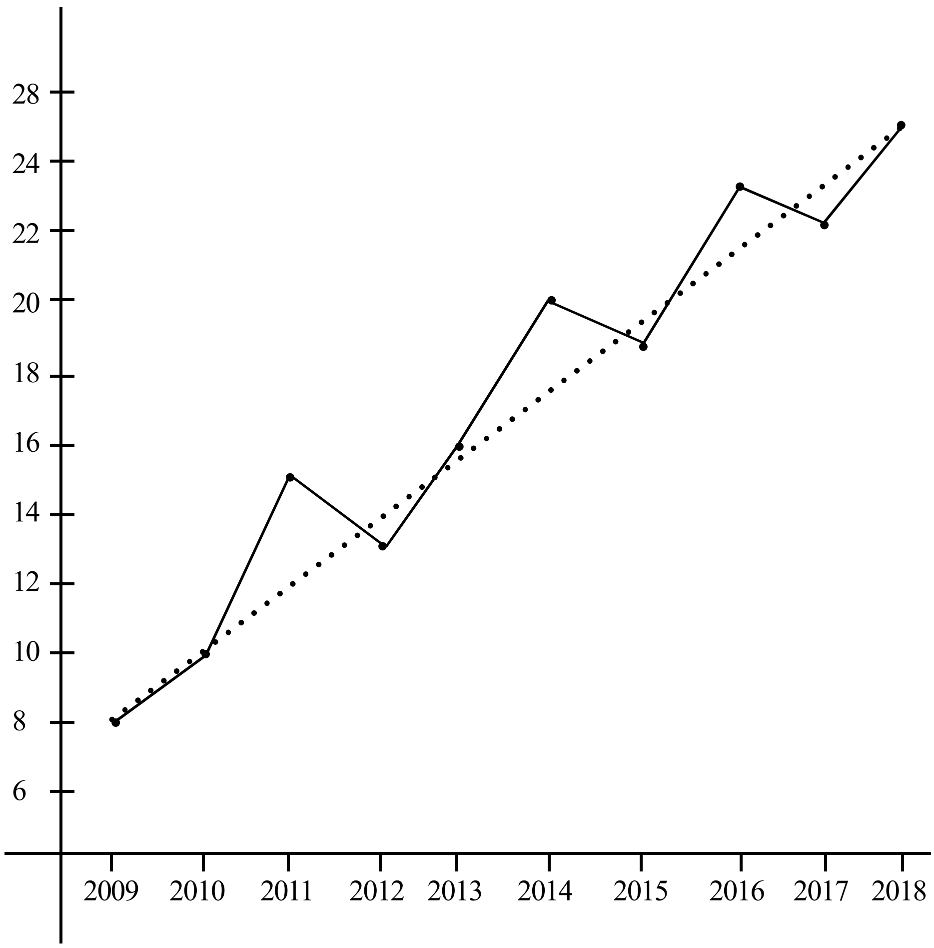
આલેખની રીત

આપેલ સામાયિક શ્રેણીમાં સમયને ‘t’ વડે દર્શાવી x-અક્ષ પર અને સાપેક્ષ સામાયિક ચલ ‘y’ ને y-અક્ષ પર લઈ બિંદુઓ (t, y) ને આલેખપત્રમાં યોગ્ય સ્કેલમાપ લઈ દર્શાવવામાં આવે છે. આ બધાં જ બિંદુઓને ક્રમમાં સીધા જોડતા મળતા આલેખને સામાયિક શ્રેણીનો આલેખ કહે છે. સામાન્ય રીતે આ આલેખ અલ્પકાલીન વધઘટોને લીધે રેખાખંડોના સમૂહ વાળી વાંકીચૂંકી રેખા જેવો દેખાય છે. ત્યારબાદ માત્ર અંદાજે આ બિંદુઓની વચ્ચેથી પસાર થતો સરળ વક્ર દોરવામાં આવે છે. આમ કરવાથી અલ્પકાલીન વધઘટોને ધ્યાનમાં ન લઈ વલણનો વક્ર મળે છે. આ વક્રને તેની જ ઢબમાં લંબાવીને ભવિષ્ય માટે સામાયિક ચલની કિંમતનું અનુમાન મેળવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ-1 : એક ફેક્ટરીમાં છેલ્લાં દસ વર્ષમાં થયેલ એકમોના ઉત્પાદન (હજારમાં)ની માહિતી નીચે મુજબ છે. તે પરથી આલેખની રીતે સુરેખ વલણ મેળવો.

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન (હજારમાં)	8	10	15	13	16	20	19	23	22	25

જવાબ : x-અક્ષ પર સમય (વર્ષ) અને y-અક્ષ પર ઉત્પાદનની કિંમતો લઈ (વર્ષ, ઉત્પાદન) બિંદુઓને આલેખમાં દર્શાવીએ.

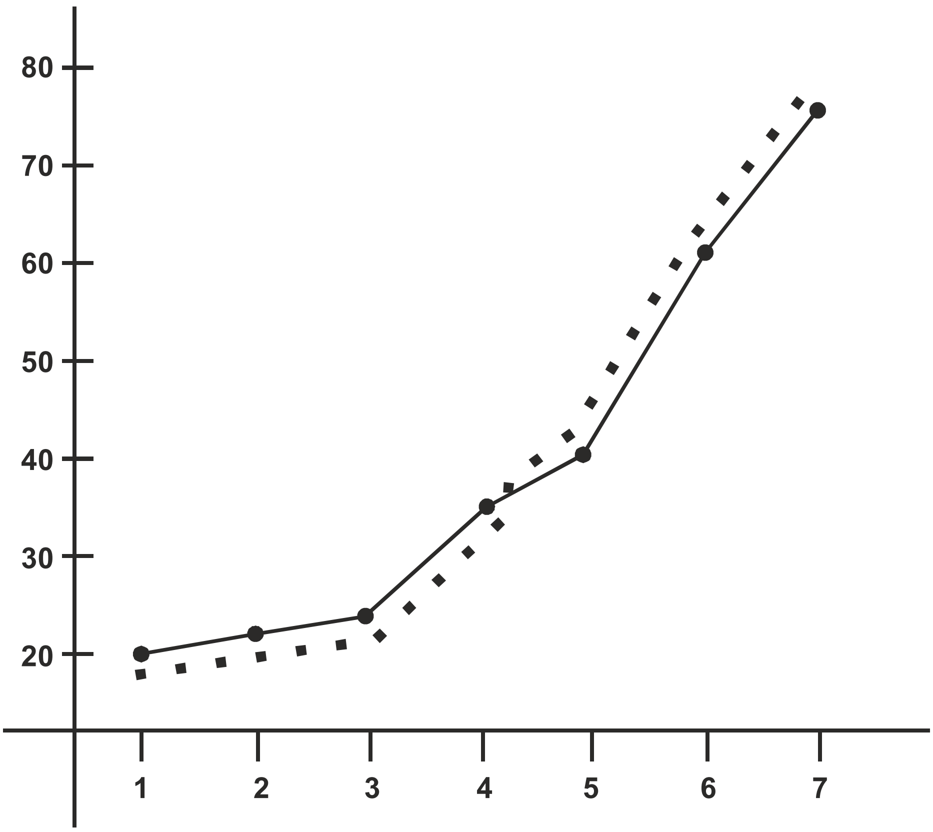


આલેખમાં જોઈ શકાય છે કે શ્રેણીનું વલણ સુરેખ પ્રકારનું છે તેથી વલણ માટે અંદાજે બિંદુઓની વચ્ચેથી પસાર થતી સુરેખ (તૂટક) વલણ દર્શાવે છે.

ઉદાહરણ-2 : શેર બજારમાં તેજી દરમ્યાન છેલ્લા સાત દિવસોમાં એક કંપનીના શેરના બંધ ભાવની નીચે આપેલી માહિતી પરથી આલેખની રીતે વલણ મેળવો.

દિવસ	1	2	3	4	5	6	7
શેરનો ભાવ (રૂા.)	20	21	23	35	40	60	75

જવાબ :



આલેખમાં જોઈ શકાય છે કે શ્રેણીનું વલણ સુરેખ નથી પરંતુ વક્રીય છે. તેથી વલણ માટે અંદાજે વચ્ચેથી પસાર થતો વક્ર (તૂટક) વલણ દર્શાવે છે.

આલેખ રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ નીચે મુજબ છે.

ગુણ :

(1) આ રીત ખૂબ જ સરળ છે.

(2) કોઈ પણ ગાણિતિક ક્રિયા કર્યા વગર વલણ અંગે જાણી શકાય છે.

(3) વલણ સુરેખ છે કે વક્રીય તે જાણી શકાય છે.

મર્યાદા :

(1) અંદાજથી જ વલણનો વક્ર દોરવાનો હોઈ જુદી જુદી વ્યક્તિઓ એક જ સામાયિક શ્રેણીના આલેખ પરથી જુદા જુદા વક્ર દોરી શકે છે અને તેથી સામાયિક ચલના અનુમાનો વ્યક્તિ લક્ષી બને છે.

(2) કોઈ ચોક્કસ ગાણિતીય સૂત્રનો ઉપયોગ થતો નથી તેથી વક્ર પરથી મળતા અનુમાનો સંપૂર્ણપણે ચોક્કસ હોતા નથી. અનુમાનોની વિશ્વસનીયતા ચકાસી શકાતી નથી.

ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત :

આપણે જોયુ કે આલેખની રીતે મળતા અનુમાનો સંપૂર્ણપણે વિશ્વસનીય હોય તે જરૂરી નથી અને તે વ્યક્તિલક્ષી પણ હોય છે. ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત એક ગાણિતિક રીત છે કે જેના દ્વારા શ્રેષ્ઠ અનુમાન મેળવી શકાય છે.

જો સામાયિક શ્રેણીના આલેખમાં બિંદુઓ લગભગ સુરેખાની આસપાસ વિખરાયેલા જોવા મળે તો સુરેખ વલણ મેળવવામાં આવે છે. તે જ રીતે જો બિંદુઓ કોઈ વક્રની આસપાસ જોવા મળે તો વક્રીય એટલે કે અસુરેખ વલણ મેળવવામાં આવે છે. આપણે સુરેખ વલણ અને વક્રીય વલણમાં ફક્ત દ્વિઘાતી પરવલય વલણના સમીકરણોનો અભ્યાસ કરીશું.

ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે મળતા સમીકરણને શ્રેષ્ઠ અન્વાયોજીત સમીકરણ પણ કહેવાય છે કારણ કે આ સમીકરણ મેળવવામાં નીચેની બે બાબતોનું ધ્યાન રાખવામાં આવે છે.

(i) વક્ર પર ન હોય તેવા બિંદુઓથી વક્ર પરના લંબ અંતરો (ત્રુટિ)નો સરવાળો શૂન્ય થાય.

(ii) ત્રુટિઓના વર્ગોનો સરવાળો ન્યૂનતમ થાય.

સુરેખ વલણ

જો આપેલ માહિતી સુરેખ વલણ ધરાવતી હોય તો $y = a + bx$ સુરેખ સમીકરણ દ્વારા વલણ રજૂ કરી શકાય છે. અહીં x એ સમય આધારિત ચલ, y એ સામાયિક શ્રેણીની કિંમત છે અને a અને b અચળાંકો છે. આ અચળાંકો મેળવવા માટે નીચેના પ્રામાણ્ય સમીકરણોનો ઉપયોગ થાય છે.

$$\sum y = na + b\sum x$$
$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ :

જો આપેલ માહિતી દ્વિઘાતી પરવલય પ્રકારનું વક્રીય વલણ ધરાવતી હોય તો $y = a + bx + cx^2$ સમીકરણ સ્વરૂપે તેને રજૂ કરી શકાય છે અને અચળાંકો a, b અને c શોધવા માટે નીચેનાં પ્રામાણ્ય સમીકરણોનો ઉપયોગ થાય છે.

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2$$
$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$
$$\sum x^2y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$

સુરેખ અને દ્વિઘાતી પરવલય વલણના સમીકરણોમાં રહેલ અચળાંકો શોધી વલણનું ચોક્કસ સ્વરૂપ મળે છે. ત્યારબાદ સમય ચલ (x) ની કિંમત મૂકી તેને અનુરૂપ સામાયિક ચલની કિંમતનું અનુમાન મેળવી શકાય છે.

નોંધ : (1) સામાન્ય રીતે સામાયિક શ્રેણી સમયના ક્રમિક અંતરે જ મેળવવામાં આવે છે. આ સંજોગોમાં ગણતરીની સરળતા ખાતર સમય (t) પરથી સમય આધારિત ચલ (x) નીચે મુજબ લેવાય છે.

★ જો વર્ષો (સમય)ની સંખ્યા એકી હોય તો,

$$x = \frac{t - \text{મધ્ય વર્ષ}}{\text{સમાન અંતર}}$$

આમ કરવાથી $x = \ldots\ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots$ મળે છે, કે જેથી $\sum x = 0$ થાય છે.

★ જો વર્ષો (સમય)ની સંખ્યા બેકી હોય તો,

$$x = \frac{t - \text{મધ્યવર્ષ}}{\text{સમાનઅંતર}/2} = 2\left(\frac{t - \text{મધ્યવર્ષ}}{\text{સમાનઅંતર}}\right)$$

આમ કરવાથી x = ..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ... મળે છે, કે જેથી $\sum x = 0$ થાય છે.

(2) જો કોઈ આકસ્મિક કારણોસર સામાયિક શ્રેણીની કિંમતોના સમય ક્રમિક અંતરે ન હોય તો

x = (t-મધ્યવર્ષ) લઈ જરૂરી ગણતરી કરી શકાય છે, પરંતુ આ સંજોગોમાં $\sum x = 0$ હંમેશા થતુ નથી.

ઉદાહરણ-3 : નીચે આપેલ માહિતી પરથી સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરો અને તે પરથી વર્ષ 2016નું વેચાણનું પૂર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
વેચાણ (હજાર રૂ.માં)	120	135	155	165	185

જવાબ : ધારો કે સુરેખ વલણનું સમીકરણ y = a + bx છે અને a અને b તેના અચળાંકો છે.

વર્ષ t	વેચાણ (હજારમાં) y	x $=\left(\frac{t-2013}{1}\right)$	x^2	xy
2011	120	-2	4	-240
2012	135	-1	1	-135
2013	155	0	0	0
2014	165	1	1	165
2015	185	2	4	370
n = 5	760	0	10	160

પ્રામાણ્ય સમીકરણોમાં મેળવેલી કિંમતો મૂકતાં,

$$\sum y = na + b\sum x \qquad \sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$
$$760 = 5a + b(0) \qquad 160 = a(o) + b(10)$$
$$\therefore a = \frac{760}{5} = 152 \qquad \therefore b = \frac{160}{10} = 16$$

સુરેખ વલણનું સમીકરણ y = a + bx માં અચળાંકો a અને b ની કિંમતો મૂકતાં તેનું ચોક્કસ સ્વરૂપ નીચે મુજબ મળે.

$$y = 152 + 16x$$

જ્યાં, $x=\left(\frac{t-2013}{1}\right)$

હવે વર્ષ 2016 માટે પૂર્વાનુમાન શોધવા માટે. t = 2016 લેતાં $x=\left(\frac{2016-2013}{1}\right)=3$ થશે.

તેથી, વેચાણનું પૂર્વાનુમાન y = 52 + 16 (3)
= 152 + 48
= 200 (હજાર રૂ.)

ઉદાહરણ-4 : નીચેની માહિતી પરથી સુરેખ વલણનું સમીકરણ મેળવો અને આપેલા વર્ષો માટે વલણની કિંમતો શોધો.

વર્ષ	2001	2002	2003	2004	2005	2006
ઉત્પાદન (કરોડ રૂ.માં)	7	10	12	14	17	24

જવાબ : ધારો કે સુરેખ વલણનું સમીકરણ y = a + bx છે અને a અને b તેનાં અચળાંકો છે.

અહીં વર્ષોની સંખ્યા n = 6 બેકી છે. તેથી સ્પષ્ટ છે કે મધ્યવર્ષ 2003.5 થશે.

વર્ષ	ઉત્પાદન	x	x^2	xy	અનુમાનિત વલણ
t	(કરોડ રૂ.માં) y	$x=2\left(\frac{t-2003.5}{1}\right)$			y = 14+1.54x
2001	7	-5	25	-35	14 + 1.54 (-5) = 6.3
2002	10	-3	9	-30	14 + 1.54 (-3) = 9.38
2003	12	-1	1	-12	= 12.46
2004	14	1	1	14	= 15.54
2005	17	3	9	51	= 18.62
2006	24	5	25	120	= 21.7
n = 6	84	0	70	108	

પ્રામાણ્ય સમીકરણોમાં મેળવેલી કિંમતો મૂકતાં,

$$\sum y = na + b\sum x \qquad \sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$
$$84 = 6a + b(0) \qquad 08 = a(0) + b(70)$$
$$\therefore a = \frac{84}{6} = 14 \qquad \therefore b = \frac{108}{70} = 1.54$$

સુરેખ વલણ y = a + bx નીચે મુજબ મળે.

y = 14 + 1.54x

જ્યાં, $x=2\left(\frac{t-2003.5}{1}\right)$

હવે, ઉપરોક્ત વર્ષો માટે x = -5, -3, -1, 1, 3, 5 મૂકતાં વલણની કિંમતો મળે જે કોષ્ટકમાં છેલ્લાં ખાનામાં દર્શાવેલી છે.

ઉદાહરણ-5 : નીચે આપેલ માહિતી પરથી સુરેખ વલણ શોધો અને વર્ષ 2020 માટે નફાનું પૂર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2008	2010	2012	2014	2016
નફો (લાખ રૂ.માં)	25	37	50	65	78

જવાબ : ધારો કે સુરેખ વલણનું સમીકરણ y = a + bx છે અને a અને b તેના અચળાંકો છે.

અહીં વર્ષોની સંખ્યા એકી છે અને ક્રમિક અંતર 2 વર્ષ છે તેથી મધ્ય વર્ષ 2012 થશે.

વર્ષ t	નફો (લાખ રૂ.માં) y	$x=\left(\frac{t-2012}{2}\right)$	x^2	xy
2008	25	-2	4	-50
2010	37	-1	1	-37
2012	50	0	0	0
2014	65	1	1	65
2016	78	2	4	156
n = 5	255	0	10	134

પ્રામાણ્ય સમીકરણોમાં મેળવેલી કિંમતો મૂકતાં,

$$\sum y = na + b\sum x \qquad \sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

$$255 = 5a + b\,(0) \qquad 134 \;= a\,(0) + 6\,(10)$$

$$\therefore a = \frac{255}{5} = 51 \qquad \therefore b \;= \frac{134}{10} = 13.4$$

તેથી, સુરેખ વલણનું સમીકરણ y = a + bx નીચે મુજબ મળે.

y = 51 + 13.4 x

જ્યાં, $x=\left(\frac{t-2015}{2}\right)$

વર્ષ 2020 માટે $x=\left(\frac{2020-2012}{2}\right)=4$ થશે.

તેથી નફાનું પૂર્વાનુમાન y = 51 + 13.4 (4)

= 51 + 53.6

= 104.6 (લાખ રૂ.)

ઉદાહરણ-6 નીચેની માહિતી પરથી દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ મેળવો અને વર્ષ 2018 માટે પૂર્વાનુમાન શોધો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015
ઉપજ (ટનમાં)	11.3	10.1	11.5	15.5	22.1

જવાબ : ધારો કે દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ $y = a + bx + cx^2$ અને a, b તથા c તેના અચળાંકો છે.

વર્ષ t	ઉપજ (ટનમાં) y	$x = \left(\frac{t-2013}{1}\right)$	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
2011	11.3	-2	4	-8	16	-22.6	45.2
2012	10.1	-1	1	-1	1	-10.1	10.1
2013	11.5	0	0	0	0	0	0
2014	15.5	1	1	1	1	15.5	15.5
2015	22.1	2	4	8	16	44.2	88.4
n = 5	70.5	0	10	0	34	27	159.2

પ્રામાણ્ય સમીકરણોમાં મેળવેલી કિંમતો મૂકતાં,

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2$$
$$70.5 = 5a + b(0) + c\,(10)$$
$$\therefore 5a + 10C = 70.5 \quad \text{...........(i)}$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$
$$27 = a(0) + b\,(10) + (0)$$
$$\therefore b = \frac{27}{10} = 2.7$$

$$\sum x^2y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$
$$159.2 = a\ (10) + b\ (0) + c\ (34)$$
$$\therefore 10a + 34c = 159.2 \quad \text{...........(ii)}$$

સમીકરણ (i) અને (ii) ને ઉકેલતાં,

$$5a + 10c = 70.5 \qquad \times 2$$
$$10a + 34 = 159.2$$

$$10\,a + 20\,c = 141$$
$$10\,a + 34\,c = 159.2$$
$$-\quad -\qquad -$$
$$-14c = -\ 18.2$$

$\therefore c = \frac{18.2}{14} = 1.3$

સમીકરણ (i) માં c = 1.3 મૂકતાં,

5a + 10 (1.3) = 70.5

5a + 13 = 70.5

5a = 70.5 - 13 = 57.5

$\therefore a = \frac{57.5}{5} = 11.5$

અચળાંકો a, b અને c ની કિંમતો $y = a + bx + cx^2$ માં મૂકવાથી દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ નીચે મુજબ મળે.

$y = 11.5 + 2.7\ x + 1.3\ x^2$

જ્યાં $x = \left(\frac{t - 2013}{1}\right)$

વર્ષ 2018 માટ $x = \left(\frac{2018 - 2013}{1}\right) = 5$ મૂકતાં,

ઉપજનું પૂર્વાનુમાન y $= 11.5 + 2.7\ (5) + 1.3\ (5)^2$

$= 11.5 + 13.5 + 32.5$

$= 57.5$ (ટન)

ઉદાહરણ-7 : નીચેની માહિતી પરથી દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ મેળવો અને વર્ષ 2025 માટે પૂર્વાનુમાન શોધો.

વર્ષ	1990	1995	2000	2005	2010	2015
શેરનો ભાવ (રૂ.માં)	25	15	13	19	33	55

જવાબ : ધારો કે દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ $y = a + bx + cx^2$ છે. અને a, b તથા c તેના અચળાંકો છે (મધ્ય વર્ષ = 2002.5)

વર્ષ t	શેરનો ભાવ (રૂ.માં) y	$x = 2\left(\frac{t - 2002.5}{5}\right)$	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1990	25	-5	25	-125	-625	-125	625
1995	15	-3	9	-27	81	-45	135
2000	13	-1	1	-1	1	-13	13
2005	19	1	1	1	1	19	19
2010	33	3	9	27	81	99	297
2015	55	5	25	125	625	275	1375
n = 6	160	0	70	0	1414	210	2464

પ્રામાણ્ય સમીકરણોમાં મેળવેલી કિંમતો મૂકતાં,

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2$$
$$160 = 6a + b\,(0) + (70)$$
$$\therefore 6a + 70c = 160$$
$$\therefore 3a + 35c = 80 \text{ ....(i)}$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$
$$210\ = a\,(0) + b\,(70) + c\,(0)$$
$$\therefore b\ = \frac{210}{70} = 3$$

$$\sum x^2y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$
$$2464\ = a\ (70) + b\ (0) + c\ (1414)$$
$$\therefore 70a + 1414c = 2464$$
$$\therefore 35a + 707c = 1232 \quad \text{................(ii)}$$

સમીકરણ (i) અને (ii) ઉકેલતાં,

$$\begin{array}{rrrl} 3a & +\ 35\,c & =\ 80 & \times\ 35 \\ 35a & +\ 707\,c & =\ 1232 & \times\ 3 \\ 105a & +\ 1225c & =\ 2800 & \\ 105a & +\ 2121c & =\ 3696 & \\ - & - & - & \\ \hline & -\ 896c & =\ -\ 896 & \end{array}$$

$$\therefore c = 1$$

c ની કિંમત સમીકરણ (i) માં મૂકતાં,

$3a + 35\ (1) = 80$

$3a\ = 80 - 35$

$3a\ = 45$

$\therefore a = 15$

અચળાંકો a, b અને c ની કિંમતો $y = a + bx + cx^2$ માં મૂકવાથી દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ નીચે મુજબ મળે.

$y = 15 + 3x + x^2$

જ્યાં, $x = 2\left(\dfrac{t - 2002.5}{5}\right)$

વર્ષ 2025 માટે $x = 2\left(\dfrac{2025 - 2002.5}{5}\right) = 9$ મૂકતાં,

શેરના ભાવનું પૂર્વાનુમાન $y\ = 15 + 3\ (9) + (9)^2$

$= 15 + 27 + 81$

$= 123$ રૂ.

ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતના ગુણ અને મર્યાદા :

ગુણ :

(1) વલણ શોધવાની એક ચોક્કસ ગાણિતિક રીત છે.

(2) પ્રત્યેક સમય માટે વલણનું અનુમાન આ રીતથી મેળવી શકાય છે.

(3) વલણ શોધવાની અન્ય રીતો કરતાં આ રીતથી સચોટ અનુમાન કરી શકાય છે.

મર્યાદા :

(1) આ રીત સંપૂર્ણ ગાણિતિક હોવાથી અન્ય રીતો કરતા વધુ ગણતરીની જરૂર પડે છે.

(2) જો વલણના વક્રનું સ્વરૂપ સ્પષ્ટ ખ્યાલ ન હોય તો કેવા પ્રકારના વક્રનું અન્વાયોજન કરવું તે નક્કી કરવું મુશ્કેલ બને છે.

(3) માહિતીમાં ફક્ત એક જ અવલોકન ઉમેરવામાં આવે તો સમગ્ર ગણતરી ફરી કરવી પડે છે.

ચલિત સરેરાશની રીત :

સરેરાશ (મધ્યકના) લક્ષણનો ઉપયોગ કરી સામાયિક શ્રેણીમાં રહેલી અલ્પકાલીન વધઘટોની અસર દૂર કરી વલણ શોધવા માટેની આ એક સરળ ગાણિતિક રીત છે. અલ્પકાલીન વધઘટોના આવર્તનનો સમય પાછલાં અનુભવો પરથી જાણી તે મુજબ તેટલાં સમયના અવલોકનોની સરેરાશ મેળવવામાં આવે છે. આમ કરવાથી અલ્પકાલીન વધઘટોની અસર દૂર થાય છે અને શોધેલી સરેરાશ કિંમતો સામાયિક ચલનું વલણ દર્શાવે છે.

જ્યારે એકી સંખ્યા (જેમ કે 3, 5, 7......)માં અવલોકનોની ચલિત સરેરાશ શોધવામાં આવે તો તે સરેરાશ મધ્યના અવલોકનની સામે મૂકવામાં આવે છે. દા.ત. જો 5 વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈએ તો તે સરેરાશ મધ્યના એટલે કે ત્રીજા અવલોકનની સામે મૂકવામાં આવે છે. તે જ મુજબ શ્રેણીમાં ઉપરથી એક એક અવલોકન અવગણી જેટલા વર્ષની ચલિત સરેરાશ શોધવાની હોય તે મેળવવામાં આવે છે. આ જ સરેરાશ કિંમતો શ્રેણીનું વલણ દર્શાવે છે.

પરંતુ જ્યારે બેકી સંખ્યા (જેમ કે, 4, 6, 8.......) અવલોકનોની ચલિત સરેરાશ મેળવવાની હોય તો ગણતરીની રીત થોડી બદલાય છે. ધારો કે 4 વર્ષની ચલિત સરેરાશ શોધવાની છે, તો પહેલા પ્રથમ ચાર અવલોકનોની સરેરાશ શોધી મધ્યમાં એટલે કે બીજા અને ત્રીજા અવલોકનની વચ્ચે તે સરેરાશ મૂકવામાં આવે છે. તે જ રીતે શ્રેણીમાં ઉપરથી એક એક અવલોકન અવગણી પછીના ચાર કિંમતોની સરેરાશ તે અવલોકનોના મધ્યની સામે મૂકવામાં આવે છે. આ બધી જ સરેરાશો કોઈ બે વર્ષની વચ્ચે આવતી હોવાથી ફરી બબ્બે સરેરાશોની પણ સરેરાશ શોધી તેઓની મધ્યની સામે મૂકવામાં આવે છે. આમ કરવાથી 4 વર્ષની ચલિત સરેરાશો મળે છે. પણ ગણતરીની સરળતા ખાતર ચાર ચાર વર્ષના ચલિત સરવાળા શોધી તે પછી બબ્બે વર્ષના સરવાળા કરવામાં આવે છે અને આ સરવાળાને 8 વડે ભાગવાથી આપણને 4 વર્ષની રીતે ચલિત સરેરાશની કિંમતો મળે છે.

નોંધ : ચલિત સરેરાશની રીતમાં શરૂઆત અને અંતના અવલોકનો (કેટલા વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈએ છીએ તે મુજબ)ની સામે વલણની કિંમતો મેળવી શકાતી નથી કારણકે શોધેલા ચલિત સરેરાશો મધ્યના વર્ષની સામે મૂકવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ-8 : કોઈ એક જીવન જરૂરિયાતની વસ્તુના છેલ્લા દસ વર્ષના ભાવ નીચે મુજબ છે. ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશોની રીતે વલણ શોધો. અલ્પકાલીન વધઘટો પણ મેળવો.

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ભાવ (રૂ.માં)	5	7	10	7	11	13	10	12	15	14

જવાબ :

વર્ષ	ભાવ y (રૂ.માં)	ત્રણ વર્ષનો ચલિત સરવાળો	ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશ વલણ (T)	અલ્પકાલીન વધઘટ y − T
1	5	–	–	–
2	7	5+7+10 = 22	$\frac{22}{3} = 7.33$	7 - 7.33 = -0.33
3	10	7+10+7 = 24	$\frac{24}{3} = 8$	10 - 8 = 2
4	7	10+7+11 = 28	$\frac{28}{3} = 9.33$	7 - 9.33 = -2.33
5	11	7+11+13 = 31	$\frac{31}{3} = 10.33$	11 - 10.33 = 0.67
6	13	11+13+10 = 34	$\frac{34}{3} = 11.33$	13 - 11.33 = 1.67
7	10	13+10+12 = 35	$\frac{35}{7} = 11.67$	10 - 11.67 = -1.67
8	12	10+12+15 = 37	$\frac{37}{3} = 12.33$	12 - 12.33 = -0.33
9	15	12+15+14 = 41	$\frac{41}{3} = 13.67$	15 - 13.67 = 1.33
10	14	-	-	-

ઉદાહરણ-9 : એક ફેક્ટરીના છેલ્લા દસ ત્રિમાસના વેચાણના આંકડા પરથી પાંચ વર્ષની રીતે ચલિત સરેરાશો લઈ વલણ તેમજ ટૂંકાગાળાની વધઘટો મેળવો.

વર્ષ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
વેચાણ (લાખ રૂ.માં)	52	54	58	60	65	56	60	63	68	69

જવાબ :

ત્રિમાસ	વેચાણ (લાખ રૂ.માં) y	પાંચ વર્ષનો ચલિત સરવાળો	પાંચ વર્ષની ચલિત સરેરાશ વલણ (T)	ટૂંકાગાળાની વધઘટ (y-T)
1	52	-	-	-
2	54	-	-	-
3	58	52+54+58+60+65 = 289	$\frac{289}{5} = 57.8$	58 - 57.8 = 0.2
4	60	54+58+60+65+56 = 293	$\frac{293}{5} = 58.6$	60 - 58.6 = 1.4
5	65	58+60+65+56+60 = 299	$\frac{299}{5} = 59.8$	65 - 59.8 = 5.2
6	56	60+65+56+60+63 = 304	$\frac{304}{5} = 60.8$	56 - 60.8 = 4.8
7	60	65+56+60+63+68 = 312	$\frac{312}{5} = 62.4$	60 - 62.4 = -2.4
8	63	56+60+63+68+69 = 316	$\frac{316}{5} = 63.2$	63 - 63.2 = -0.2
9	68	-	-	-
10	69	-	-	-

ઉદાહરણ-10 : ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ નીચેની વિગત પરથી વલણ શોધો. અલ્પકાલીન વધઘટો પણ મેળવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન (ટનમાં)	20	32	40	51	26	40	52	60

જવાબ :

વર્ષ	ઉત્પાદન (ટનમાં) y	ચાર વર્ષનો ચલિત સરવાળો	બબ્બે કિંમતોનો સરવાળો	ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ (T)	અલ્પકાલીન વધઘટ y - T
2011	20	-	-	-	
2012	32		-	-	-
		143			
2013	40		292	36.5	3.5
		149			
2014	51		306	38.25	12.75
		157			
2015	26		326	40.75	-14.75
		169			
2016	40		347	43.38	-3.38
		178			
2017	52		-	-	-
2018	60		-	-	-

નોંધ : અહીં, 'બબ્બે કિંમતોનો સરવાળો' મથાળું ધરાવતા સ્તંભની કિંમતો ખરેખર 8 મૂળ અવલોકનોનો સરવાળો હોઈ ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ શોધતી વખતે તેને 8 વડે ભાગવામાં આવે છે.

ચલિત સરેરાશની રીતના ગુણ અને મર્યાદા :

ગુણ :

(1) આ સરળ રીત છે અને ગણિતીય રીત હોવાથી જુદી જુદી વ્યક્તિઓ દ્વારા એક સમાન પરિણામ મળે છે.

(2) આલેખની રીત કરતાં વધુ વિશ્વસનીય છે.

(3) જો અવલોકનો શ્રેણીમાં ઉમેરવામાં આવે તો પણ સમગ્ર ગણતરી ફરી કરવી પડતી નથી.

(4) ચક્રિય વધઘટની અસર તેના વધઘટના ગાળા જેટલી જ ચલિત સરેરાશ લેવાથી આપોઆપ દૂર કરી શકાય છે.

મર્યાદા :

(1) શરૂઆત અને અંતના અવલોકનો માટે વલણ મળતુ નથી.

(2) જો વલણ સુરેખ ન હોય તો આ રીત યોગ્ય નથી.

(3) કોઈ ચોક્કસ ગાણિતિક સૂત્ર મળતુ ન હોઈ, ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત જેટલું સચોટ અનુમાન થઈ શકતુ નથી.

મોસમી વધઘટ માપવાની રીતો

સામાયિક શ્રેણીમાં રહેલ મોસમી વધઘટ શોધવા માટેની નીચેની બે રીતોનો આપણે અભ્યાસ કરીશું.

(1) સાદી સરેરાશની રીત (અથવા મોસમી સૂચકઆંકની રીતે)

(2) ચલિત સરેરાશની રીત

સાદી સરેરાશ (મોસમી સૂચકઆંક)ની રીત

આ એક ખૂબ જ સરળ રીત છે. સામાયિક શ્રેણીમાં રહેલ સામાન્ય મોસમી ફેરફારોની સરખામણીએ કોઈ ચોક્કસ મોસમી ફેરફાર દર્શાવતું ટકાવારી માપ એટલે જ મોસમી સૂચકઆંક. જ્યારે સામાયિક શ્રેણીની માહિતી વર્ષ અને મોસમ મુજબ આપેલી હોય ત્યારે નીચે મુજબ મોસમી સૂચકઆંક મેળવી શકાય છે. અહીં મોસમ તરીકે અઠવાડિયું, દિવસ, મહિનો, ત્રિમાસ વગેરે હોઈ શકે છે.

(i) સૌ પ્રથમ પ્રત્યેક મોસમ માટે અવલોકનોનો સરવાળો કરી તેમની સરેરાશો મેળવવામાં આવે છે.

(ii) દરેક મોસમી સરેરાશોની સરેરાશ એટલે કે સર્વસામાન્ય સરેરાશ મેળવવામાં આવે છે.

(iii) ત્યારબાદ દરેક મોસમ માટે મોસમી સૂચકઆંક નીચેના સૂત્ર પરથી શોધવામાં આવે છે.

$$\text{મોસમી સૂચક આંક} = \frac{\text{મોસમની સરેરાશ}}{\text{સર્વ સામાન્ય સરેરાશ}} \times 100$$

ઉદાહરણ-11 : નીચે આપેલી માહિતી પરથી મોસમી સૂચકઆંકો મેળવો.

	મોસમ			
વર્ષ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2001	25	29	36	40
2002	28	33	40	45
2003	22	27	34	39
2004	24	30	36	42
2005	26	30	38	44

જવાબ : અહીં પ્રત્યેક વર્ષમાં ત્રિમાસ આપેલા છે તેથી તે મોસમ ગણાય. હવે નીચે મુજબ મોસમી સૂચકઆંકોની ગણતરી કરીશું.

	મોસમ			
વર્ષ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2001	25	29	36	4
2002	28	33	40	45
2003	22	27	34	39
2004	24	30	36	42
2005	26	30	38	44
સરવાળો	125	149	184	210
સરેરાશ	25	29.8	36.8	42
મોસમી સૂ.આંક.	$\frac{25}{33.4} \times 100$	$\frac{29.8}{33.4} \times 100$	$\frac{36.8}{33.4} \times 100$	$\frac{42}{33.4} \times 100$
$= \frac{\text{સરેરાશ}}{\text{સર્વસા.સ}} \times 100$	= 74.85	= 89.22	= 108.98	= 125.75

$$\text{સર્વ સામાન્ય સરેરાશ} = \frac{25 + 29.8 + 36.8 + 42}{4}$$

$$= \frac{133.6}{4}$$

$$= 33.4$$

ઉદાહરણ-12 : એક કંપનીનું સરેરાશ ત્રિમાસિક વેચાણ રૂા. 250000 થયું હતું. વિવિધ ત્રિમાસના સૂચકઆંકો નીચે મુજબ છે. તો તે પરથી દરેક ત્રિમાસના વેચાણનું અનુમાન શોધો.

ત્રિમાસ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
સૂચકઆંક	90	120	80	110

જવાબ : અહીં, કંપનીનું સરેરાશ ત્રૈમાસિક વેચાણ એટલે કે સર્વ સામાન્ય સરેરાશ રૂા. 250000 છે.

$$\text{કોઈ ત્રિમાસનો સૂચકઆંક} = \frac{\text{તે ત્રૈમાસનું સરેરાશ વેચાણ}}{\text{સર્વસામાન્ય સરેરાશ}} \times 100$$

$$\therefore \text{ મોસમી સૂચકઆંક} = \frac{\text{સરેરાશ વેચાણ}}{250000} \times 100$$

$\therefore$ સરેરાશ વેચાણ = 2500 $\times$ મોસમી સૂચકઆંક

ત્રિમાસ સૂચકઆંક સરેરાશ વેચાણ

= 2500 $\times$ સૂચકઆંક

Q_1	90	2500 $\times$ 90	= 225000
Q_2	120	2500 $\times$ 120	= 300000
Q_3	80	2500 $\times$ 80	= 200000
Q_4	110	2500 $\times$ 110	= 275000

મોસમી વધઘટ શોધવા માટેની ચલિત સરેરાશની રીત :

સામાન્ય રીતે ચક્રિય વધઘટના એક આવર્તન જેટલો જ ચલિત સરેરાશનો ગાળો લેવામાં આવે છે. તેથી ચક્રિય વધઘટની અસર શ્રેણીમાંથી આપોઆપ દૂર થાય છે. ચલિત સરેરાશની રીતે વલણ શોધી શ્રેણીના અવલોકનોમાંથી તે બાદ કરતા જે અલ્પકાલીન વધઘટ મળે તેમાં ફક્ત મોસમી વધઘટ અને અનિયમિત વધઘટની અસર જ જોવા મળે છે. આ અલ્પકાલીન વધઘટોની મદદથી દરેક મોસમની સરેરાશ શોધી તે પરથી મોસમી વધઘટ મેળવવામાં આવે છે. અને છેલ્લે અલ્પકાલીન વધઘટમાંથી મોસમી વધઘટ બાદ કરવાથી અનિયમિત વધઘટ શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ-13 : એક ઈલેક્ટ્રોનિક્સ સાધનોનું ઉત્પાદન કરતી કંપનીના છેલ્લા ત્રણ વર્ષના ત્રૈમાસિક નફા (લાખ રૂા.)ની નીચે આપેલી વિગત પરથી મોસમી વધઘટો શોધો.

મોસમ				
વર્ષ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2011	56	48	62	46
2012	60	54	66	52
2013	70	56	68	54

જવાબ : અહીં, પ્રત્યેક વર્ષમાં ચાર ત્રિમાસ એટલે કે મોસમ આપી છે. તેથી સૌ પ્રથમ આપેલ માહિતી પરથી ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટો નીચે મુજબ મેળવવામાં આવે છે.

વર્ષ		નફો (લાખ રૂ.) y	ચાર વર્ષનો ચલિત સરવાળો	બબ્બે કિંમતોનો સરવાળો	ચલિત સરેરાશ વલણ (T)	અલ્પકાલીન વધઘટ
2011	Q_1	56		-	-	-
	Q_2	48		-	-	-
			212			
	Q_3	62		428	53.5	8.5
			216			
	Q_4	46		438	54.75	-8.75
			222			
2012	Q_1	60		448	56	4
			226			
	Q_2	54		458	57.25	-3.25
			232			
	Q_3	66		474	59.25	6.75
			242			
	Q_4	52		486	60.75	-8.75
			244			
2013	Q_1	70		490	61.25	8.75
			246			
	Q_2	56		494	61.75	-5.75
			248			
	Q_3	68		-	-	-
	Q_4	54		-	-	-

અલ્પકાલીન વધઘટો પરથી મોસમી વધઘટો નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે.

અલ્પકાલીન વધઘટ				
વર્ષ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2011	-	-	8.5	-8.75
2012	4	-3.25	6.75	-8.75
2013	8.75	-5.75	-	-
સરવાળો	12.75	-9	15.25	-17.5
સરેરાશ	6.375	-4.5	7.625	-8.75

હવે સરેરાશોની સરેરાશ એટલે કે સર્વ સામાન્ય સરેરાશ મેળવી તેનું ચિહ્ન બદલતાં જે સુધારો મળે તે દરેક મોસમની સરેરાશમાં ઉમેરવાથી મોસમી વધઘટ શોધી શકાય છે. જે નીચે મુજબ છે.

સુધારો = - (સર્વ સામાન્ય સરેરાશ)

$$= -\left[\frac{6.375+(-4.5)+7.625+(-8.75)}{4}\right]$$

$$= -\left(\frac{0.75}{4}\right) = -0.1875$$

મોસમી વધઘટ = સરેરાશ + સુધારો

Q_1 માટે : મોસમી વધઘટ = 6.375 - 0.1875 = 6.1875

Q_2 માટે : મોસમી વધઘટ = -4.5 - 0.1875 = -4.6875

Q_3 માટે : મોસમી વધઘટ = 7.625 - 0.1875 = 7.4375

Q_4 માટે : મોસમી વધઘટ = -8.75 - 0.1875 = -8.9375

સ્વાધ્યાય

1. નીચે આપેલ પ્રશ્ન માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો.

(i) 'ફેક્ટરીમાં આગ લાગવાથી ઉત્પાદનમાં થયેલો ઘટાડો' કઈ વધઘટ દર્શાવે છે ?

(a) અનિયમિત (b) મોસમી (c) ચક્રિય (d) દીર્ઘકાલીન

(ii) નીચેનામાંથી કયા ફેરફારો મોસમી ઘટકની અસર છે ?

(a) મોબાઈલ ફોનના વેચાણમાં થયેલો સતત વધારો

(b) પેટ્રોલના ભાવમાં થતા ફેરફારો

(c) રેસ્ટોરન્ટ માલિકના દૈનિક આવકમાં શનિ-રવિએ થતો વધારો

(d) આમાંથી એક પણ નહિ

(iii) મોસમી વધઘટોનો આવર્તન સમય કેટલો હોય છે ?

(a) 5 થી 10 વર્ષ

(b) 10 થી 20 વર્ષ

(c) વધુમાં વધુ 1 વર્ષ

(d) એક વર્ષથી વધુ

(iv) વલણ શોધવા દ્વિઘાતી પરવલયનું અન્વાયોજન કરવાની રીત કઈ છે ?

(a) આલેખની રીત (b) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત

(c) ચલિત સરેરાશની રીત (d) અર્ધ-સરેરાશની રીત

(v) નીચેના પૈકી કઈ વધઘટનું અનુમાન સીધી રીતે મેળવી શકાતું નથી.

(a) અનિયમિત વધઘટ

(b) ચક્રિય વધઘટ

(c) વલણ

(d) મોસમી વધઘટ

(vi) જો સુરેખ વલણનું સમીકરણ $y = 11.5 + 0.75x$ છે જ્યાં $x = \left(\frac{\text{વર્ષ} - 2015}{5}\right)$. આ માહિતી પરથી વર્ષ 2025 નું પૂર્વાનુમાન શોધો.

(a) 13 (b) 12.25 (c) 1530.25 (d) એક પણ નહિ

(vii) નીચેના પૈકી કયુ ચક્રિય વધઘટનું ઉદાહરણ છે ?

(a) ચોમાસમાં છત્રીના વેચાણમાં થયેલો વધારો.

(b) રોગચાળા દરમ્યાન થયેલ દવાના વેચાણનો વધારો

(c) શેર બજારમાં તેજીને લીધે થયેલ શેરના ભાવમાં વધારો

(d) આમાંથી એક પણ નહિ.

(viii) નીચેના પૈકી કઈ વધઘટ લાંબાગાળાની વધઘટ છે ?

(a) વલણ (b) મોસમી (c) ચક્રિય (d) અનિયમિત

(ix) સામાયિક શ્રેણીમાં સુરેખ વલણ હોય તો તે શું સૂચવે છે ?

(a) ગુણોત્તર શ્રેણીમાં ફેરફાર (b) અચળ ફેરફાર

(c) હરાત્મક શ્રેણીમાં ફેરફાર (d) ઘાંતાકીય ફેરફાર

(x) નીચેના પૈકી કઈ કઈ વધઘટો અલ્પકાલીન વધઘટો ગણાય છે ?

(a) મોસમી વધઘટ (b) ચક્રિય વધઘટ

(c) અનિયમિત વધઘટ (d) (a) (b) અને (c) બધી જ

2. નીચેના પ્રશ્નોના ટૂંકમાં જવાબ આપો.

(i) સામાયિક શ્રેણી એટલે શું ?

(ii) સામાયિક શ્રેણીમાં જોવા મળતી વિવિધ વધઘટોના નામ જણાવો.

(iii) સામાયિક શ્રેણીનું પૃથક્કરણ એટલે શું ?

(iv) એક વર્ષ કે તેથી ઓછા સમયમાં ફરી જોવા મળતી વધઘટ ને આપ કઈ વધઘટ કહેશો?

(v) અનિયમિત વધઘટનું અનુમાન કરવું અશક્ય છે. આ વિધાનની યથાર્થતા ચકાસો.

(vi) સામાયિક શ્રેણીમાં દસ અવલોકનો આપેલા હોય અને ત્રણ વર્ષની ચલિત સરવાળાની રીતે વલણ શોધીએ તો વલણની કેટલી કિંમતો મળે છે ?

(vii) ચક્રિય વધઘટ એટલે શું ?

(viii) વલણ શોધવાની ચલિત સરેરાશની રીતની મર્યાદાઓ જણાવો.

(ix) સામયિક શ્રેણીના યોગનીય મૉડેલ વિશે જણાવો.

(x) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતમાં કઈ બે બાબતોનું ધ્યાન રાખવામાં આવે છે ?

3. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) સામયિક શ્રેણીના ઉપયોગો જણાવો.

(ii) વલણનો અર્થ જણાવી તેના વિશે સમજાવો.

(iii) મોસમી વધઘટ અને ચક્રિય વધઘટ વિશે ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

(iv) આલેખની રીતમાં ગુણ અને મર્યાદાઓ જણાવો.

(v) ચલિત સરેરાશની રીત સમજાવો.

(vi) ન્યૂનતમ વર્ગોની રીત વર્ણવો.

(vii) સુરેખ વલણ અને દ્વિઘાતી પરવલયની રીતે વલણ શોધવા માટેના પ્રામાણ્ય સમીકરણો લખો.

4. નીચેની સામાયિક શ્રેણી પરથી આલેખની રીતે વલણ મેળવો.

માસ	જાન્યુ.	ફેબ્રુ.	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટે.	ઓક્ટો.
ભાવ (રૂા.)	5	7	8	10	13	12	15	17	21	25

5. નીચેની માહિતી પરથી આલેખની રીતે વલણ મેળવો.

વર્ષ	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ઉત્પાદન (લાખ રૂા.)	63	64	65	70	76	86	98	100	108

6. કાર બનાવતી એક કંપનીનો નફો (કરોડ રૂા.માં) નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી ન્યૂનતમ વર્ગોની રીતે સુરેખ વલણ મેળવો અને વર્ષ 2018 માટે નફાનું અનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
નફો (કરોડ રૂા.)	28	39	46	40	56	52	61

7. નીચેની માહિતી પરથી સુરેખ વલણનું અન્વાયોજન કરી દરેક વર્ષ માટે વલણની કિંમતો શોધો.

વર્ષ	2006	2008	2010	2012	2014
વેચાણ (લાખ રૂા.)	35	56	79	80	90

8. નીચે આપેલ વિગત પરથી સુરેખ વલણનું સમીકરણ મેળવી તે પરથી વર્ષ 2019 માટે પૂર્વાનુમાન શોધો.

વર્ષ	2013	2014	2015	2016	2017	2018
ઉત્પાદન (કરોડ રૂા.)	7	10	12	14	17	24

9. નીચે આપેલ માહિતી પરથી દ્વિઘાતી પરવલયનું સમીકરણ મેળવો. તે પરથી 2014ના વર્ષ માટે ઉપજનું અનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012
ઉપજ (ટનમાં)	250	310	330	390	320

10. નીચેની માહિતી પરથી દ્વિઘાતી વક્રીય વલણનું અન્વાયોજન કરો અને તે પરથી 2012 અને 2013 વર્ષનું પૂર્વાનુમાન મેળવો.

વર્ષ	2006	2007	2008	2009	2010	2011
શેરનો ભાવ (રૂા.)	144	148	154	172	186	252

11. ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ તેમજ અલ્પકાલીન વધઘટો શોધો.

વર્ષ	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
વેચાણ (હજાર રૂા.)	7	11	12	10	14	18	15	19	21	18

12. એક મોબાઈલ ફોનનું વેચાણ કરતી દુકાનમાં છેલ્લા 12 મહિનામાં વેચાયેલા મોબાઈલ ફોનની સંખ્યા નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી ત્રણ વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ મેળવો. તે પરથી ટૂંકા ગાળાની વધઘટો પણ મેળવો.

મહિનો	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
વેચાણ	70	81	86	73	81	80	67	90	92	88	84	74

13. નીચેની માહિતી પરથી પાંચ વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ શોધો.

વર્ષ	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
ઉત્પાદન (હજાર કિ.ગ્રા.)	19	26	30	37	45	16	25	35	39	47

14. એક કંપનીના છેલ્લા દસ ત્રિમાસના ઉત્પાદનના આંકડાની સામાયિક શ્રેણી પરથી પાંચ વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટો મેળવો.

ત્રિમાસ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ઉત્પાદન (ક્વિ.)	65	69	75	84	91	67	72	78	83	93

15. નીચેની માહિતી પરથી ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ અને અલ્પકાલીન વધઘટો મેળવો.

વર્ષ	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
ભાવ (રૂા.)	2	5	4	7	3	6	6	8	6	10

16. નીચે આપેલ વિગત પરથી ચાર વર્ષની ચલિત સરેરાશ લઈ વલણ શોધો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
સૂચક આંક	164	160	170	216	172	166	174	220

17. નીચેની માહિતી પરથી મોસમી સૂચકઆંકો મેળવો.

મોસમી				
વર્ષ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
2011	51	50	52	51
2012	53	60	55	52
2013	55	55	53	53
2014	59	53	60	56

18. નીચેની માહિતી પરથી મોસમી સૂચક આંકો મેળવો.

વર્ષ	શિયાળો	ઉનાળો	ચોમાસુ
2008	90	25	68
2009	85	30	65
2010	78	40	60
2011	93	29	70
2012	80	35	64

19. નીચેની માહિતી પરથી મોસમી વધઘટો શોધો.

વર્ષ	શિયાળો	ઉનાળો	ચોમાસુ
2014	35	30	20
2015	50	44	35
2016	60	55	48

જવાબો :

1. (i) a (ii) c (iii) c (iv) b (v) a

   (vi) a (vii) c (viii) a (ix) b (x) d

2. (iv) મોસમી વધઘટ (v) સાચું છે. (vi) 8 કિંમતો

6. સુરેખ વલણ y = 46 + 4.82x જ્યાં, x = (વર્ષ-2014) અને 2018 માટે નફાનું અનુમાન = 65.28 કરોડ રૂા.

7. સુરેખ વલણ y = 68 + 13.4x જ્યાં $x = \left(\frac{\text{વર્ષ} - 2010}{2}\right)$

   વલણ : 41.2, 54.6, 68, 81.4, 94.8

8. સુરેખ વલણ y = 14 + 1.54x જ્યાં, $x = 2\left(\frac{\text{વર્ષ} - 2015.5}{1}\right)$ અને 2019 વર્ષ માટે

   ઉત્પાદનનું અનુમાન = 24.78 કરોડ રૂા.

9. દ્વિઘાતી વલણ $y = 351.42 + 22x - 15.71x^2$

   જ્યાં x = (વર્ષ-2010) અને વર્ષ 2014 માટે પૂર્વાનુમાન = 188.06

10. દ્વિઘાતી વલણ $y = 158.19 + 9.6x + 1.53x^2$

    જ્યાં $x = 2\left(\frac{\text{વર્ષ} - 2008.5}{1}\right)$

    2012 માટે પૂર્વાનુમાન = 300.36

    2013 માટે પૂર્વાનુમાન = 368.52

11. વલણ : -, 10, 11, 12, 14, 15.67, 17.33, 18.33, 19.33, -

    અલ્પકાલીન વધઘટ : -, 1, 1, -2, 0, 2.33, -2.33, 0.67, 1.67, -

12. વલણ : -, 79, 80, 80, 78, 76, 79, 83, 90, 88, 82, -

    ટૂંકાગાળાની વધઘટ : -, 2, 6, -7, 3, 4, -12, 7, 2, 0, 2, -

13. વલણ : -, -, 31.4, 30.8, 30.6, 31.6, 32, 32.4, -, -

14. વલણ : -, -, 76.8, 77.8, 77.8, 78.4, 78.2, 78.6, -, -

15. વલણ : -, -, 4.63, 4.88, 5.25, 5.63, 6.13, 7, -, -

    અલ્પકાલીન : -, -, -0.63, 2.12, -2.25, 0.67, -0.13, -1, -, -

16. વલણ : -, -, 178.5, 180.25, 181.5, 182.5, -, -

17. મોસમી સૂચકઆંક : 100.46, 100.46, 101.38 અને 97.70

18. મોસમી સૂચકઆંક : 140.13, 52.30 અને 107.57

19. મોસમી વધઘટ : 11.07, 1.18, -12.26

એકમ 6

સંભાવના

: રૂપરેખા :

1. અર્થ
2. વ્યાખ્યાઓ
3. સંભાવનાનો સરવાળા તથા ગુણાકારનો નિયમ
4. દાખલાઓ

પ્રાસ્તાવિક :

આપણે વ્યવહારમાં ઘણી વખત એમ બોલતા હોઈએ છીએ કે આજે વરસાદ પડવાની શક્યતા છે. આજે ભારતને મેચ જીતવાનો "chance" છે. આ શક્યતા અથવા ચાન્સનાં સંખ્યાત્મક માપને આપણે સંભાવના કહી શકીએ. આમ કોઈ ઘટના કે જે અનિશ્ચિત છે (જે હજુ બની નથી પણ બની શકે છે.) તે બનવાની શક્યતાનાં સંખ્યાત્મક માપને સંભાવના કહેવાય. આ અર્થમાં જોઈએ તો મોબાઈલમાં કે ગુગલ પર weather (હવામાન) જોઈએ અને તેમાં વરસાદ પડવાની શક્યતા જે 70% બતાવે, તો તેને સંભાવના કહેવાય.

અહીં આપણે પ્રશિષ્ટ સંભાવનાનો અભ્યાસ કરીશું. જ્યારે આપણે કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગ કરીએ (જેમકે સિક્કો ઉછાળવો) અને તેનાં પરથી કોઈ ઘટના બનવાની સંભાવના શોધીએ તેને પ્રશિષ્ટ સંભાવના કહે છે. સંભાવનાનો અભ્યાસ કરતા પહેલાં આપણે સંભાવના માટે ઉપયોગી કેટલાંક પદો જોઈશું.

યદચ્છ પ્રયોગ : જે પ્રયોગનાં તમામ પરિણામો વિશે જાણતા હોઈએ પરંતુ પ્રયોગને અંતે ચોક્કસપણે કયું પરિણામ ઉદ્ભવશે તે કહી શકીએ નહિ તેવા પ્રયોગને યદચ્છ પ્રયોગ કહે છે. દા.ત. સિક્કો ઉછાળીએ તો આપણને ખ્યાલ છે કે પ્રયોગને અંતે છાપ કે કાંટો મળી શકે છે, પરંતુ સિક્કો ઉછાળતા પહેલાં આપણે ચોક્કસપણે કહી શકતા નથી કે છાપ પડશે કે કાંટો. આમ "સિક્કો ઉછાળવો" એ યદચ્છ પ્રયોગનું ઉદાહરણ છે. આ જ રીતે પાસો ઉછાળવો, પત્તાની વહેંચણી કરવી, કૉલેજનાં વિદ્યાર્થીઓનાં નામની ચિઠ્ઠીઓ બનાવી તેમાંથી એક ચિઠ્ઠી પસંદ કરવી વગેરે પણ યદચ્છ પ્રયોગનાં ઉદાહરણ છે. આ ઉપરથી યદચ્છ પ્રયોગનાં કેટલાક લક્ષણો નીચે મુજબ તારવી શકાય.

1. પ્રયોગને અંતે મળતા તમામ પરિણામો વિશે પહેલેથી ખ્યાલ હોય પરંતુ કોઈ એક પરિણામ વિશે ખાત્રીપૂર્વક કહી શકાય નહિ.

2. પ્રયોગને અંતે કોઈ પણ એક પરિણામ મળે.

3. આ પ્રયોગનું પુનરાવર્તન સ્વતંત્ર રીતે કરી શકાય.

એટલે કે એક સિક્કો ઉછાળતા પહેલી વખત છાપ મળે તો બીજી વખત મળતું પરિણામ પ્રથમ વખત મળેલા પરિણામ પર આધાર રાખતું નથી, તે છાપ પણ હોઈ શકે અથવા કાંટો પણ હોઈ શકે.

નિદર્શ અવકાશ : યદચ્છ પ્રયોગનાં શક્ય તેટલા તમામ પરિણામોનાં ગણને નિદર્શ અવકાશ કહે છે. તેને S અથવા U વડે દર્શાવાય છે. દા.ત. સિક્કો ઉછાળતા છાપ અથવા કાંટો મળી શકે. આમ સિક્કો ઉછાળવાના યદચ્છ પ્રયોગ માટે નિદર્શ અવકાશ {છાપ, કાંટો} થાય. આ જ રીતે એક વર્ગનાં 100 વિદ્યાર્થીઓને તેમનાં રોલ નંબર 1થી 100 સાથે સાંકળતા "આ વર્ગમાંથી એક વિદ્યાર્થી પસંદ કરવાનાં" યદચ્છ પ્રયોગમાં નિદર્શ અવકાશ $\{1,2,....,100\}$ થાય. નિદર્શ અવકાશનાં દરેક પરિણામને નિદર્શ બિંદુ કહે છે. જ્યારે આપણે નિદર્શ અવકાશના બધા જ બિંદુઓને ગણી શકીએ તો તેને શાન્ત નિદર્શ અવકાશ કહે છે અને જ્યારે નિદર્શ અવકાશમાં ગણી ન શકાય તેટલા (અસંખ્ય) બિંદુઓ આવેલા હોય તો તેને અનંત નિદર્શ અવકાશ કહે છે. દા.ત. એક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા પસંદ કરવાના પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ $\{1,2,....\}$ થાય.

આ જ રીતે બે સિક્કા ઉછાળતા નિદર્શ અવકાશ {HH, HT, TH, TT} થાય.

જ્યારે ત્રણ સિક્કા ઉછાળવાનાં યદચ્છ પ્રયોગમાં નિદર્શ અવકાશ {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} થાય.

બે પાસા ઉછાળતા {(1,1), (1,2),.....(1,6), (2,1), (2,2).......(2,6), (6,1), (6,2),.....(6,6)} આ નિદર્શ અવકાશ મળે. જેનાં 36 પરિણામો હશે.

એક સિક્કો અને એક પાસો ઉછાળતા {1H, 2H, 3H, 4H, 5H, 6H, 1T, 2T, 3T, 4T, 5T, 6T} નિદર્શ અવકાશ મળે.

આમ,

સાધન	કુલ પરિણામ	કેટલી વખત ઉછાળીએ	નિદર્શ અવકાશનાં ઘટકો
સિક્કો	2 (H,T)	2	$2^2 = 4$
સિક્કો	2 (H,T)	3	$2^3 = 8$
સિક્કો	2 (H,T)	4	$2^4 = 16$
પાસો	6 (1,2....,6)	1	$6^1 = 6$
પાસો	6	2	$6^2 = 36$
પાસો	6	3	$6^3 = 216$

ઘટના : યદચ્છ પ્રયોગને અંતે મળતા પરિણામને ઘટના કહે છે. સામાન્ય રીતે તેને A, B, C.... વડે દર્શાવાય છે. દા.ત. ''સિક્કો ઉછાળતા છાપ મળે'' તેને ઘટના બની કહેવાય. પાસો ઉછાળતાં તેના પર આંક ''3'' મળ્યો તેને ઘટના બની કહેવાય.

ટૂંકમાં,

સિક્કો/પાસો ઉછાળવો એ યદચ્છ પ્રયોગ છે.

સિક્કો/પાસો ઉછાળતા મળતા પરિણામોનો ગણ એ નિદર્શ અવકાશ છે. {H,T} {1,2,.....6} અને

સિક્કો/પાસો ઉછાળતા જે પરિણામ મળે તેને ઘટના કહે છે. {H} {3}

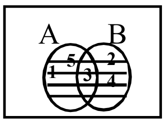
અહીં એ સ્પષ્ટ છે કે ઘટના એ નિદર્શ અવકાશનો ઉપગણ હોય છે. પાસો ઉછાળતા નિદર્શ અવકાશ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ મળે અને પાસા પર મળતા એકી અંકોની સંખ્યાને ઘટના A' વડે દર્શાવીએ તો $A = \{1,3,5\}$ થાય.

આમ $A \subset S$ થાય. (A, Sનો ઉપગણ છે.)

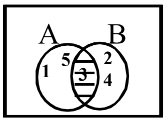
પૂરક ઘટના : કોઈ ઘટના A માટે, નિદર્શ અવકાશમાં હોય પણ, ઘટના Aમાં ન હોય, તેવા તમામ નિદર્શ બિંદુઓનાં ગણને ઘટના Aની પૂરક ઘટના કહે છે. તેને A' અથવા A^c વડે દર્શાવાય છે.

દા.ત. એક પાસો ઉછાળવાનાં નિદર્શ પ્રયોગ માટે નિદર્શ અવકાશ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} થાય. હવે જો પાસો ઉછાળતા તેની પર મળતા એકી અંકોને ઘટના A વડે દર્શાવીએ તો A = {1, 3, 5} થાય જ્યારે A' = {2,4,6} થાય. આમ, A' ને ઘટના A ની પૂરક ઘટના કહે છે.

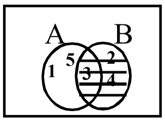
યોગ ઘટનાઃ



છેદ ઘટનાઃ



તફાવત ઘટનાઃ



યોગ ઘટના : નિદર્શ અવકાશ Sમાં ઘટના A અને ઘટના B વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે તો ઘટના Aમાં હોય અથવા ઘટના Bમાં હોય તેવા તમામ નિદર્શ બિંદુઓનાં ગણને ઘટના A તથા ઘટના Bની યોગ ઘટના કહે છે. તેને સંકેતમાં A B વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને A યોગ B એમ વંચાય છે. $A = \{1,3,5\}$ અને $B = \{2,3,4\}$ હોય તો A $B = \{1,2,3,4,5\}$ થાય.

આમ (A B) = બે ઘટના A અને Bમાંથી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ઉદ્ભવે

છેદ ઘટના : નિદર્શ અવકાશ Sમાં બે ઘટના A અને B વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે તો ઘટના Aમાં હોય અને ઘટના Bમાં હોય તેવા તમામ નિદર્શ બિંદુઓનાં ગણને ઘટના A તથા ઘટના Bની છેદ ઘટના કહે છે. તેને સંકેતમાં A B વડે દર્શાવાય છે અને A છેદ B એમ વંચાય છે. ઉપરનાં ઉદાહરણમાં A $B = \{3\}$ થાય.

$(A \quad B)$ = બે ઘટના A અને B સાથે ઉદ્ભવે.

તફાવત ઘટના : નિદર્શ અવકાશ Sની બે ઘટનાઓ A અને B માટે જો ઘટના Aમાં હોય અને ઘટના B ન હોય તેવા તમામ નિદર્શ બિંદુઓના ગણને ઘટના A અને Bની તફાવત ઘટના કહે છે. તેને A-B વડે દર્શાવાય છે.

ઉપર દર્શાવેલ ઉદાહરણમાં $A - B = \{1,5\}$

સાનુકૂળ બનાવો : નિદર્શ અવકાશ Sનાં જે બનાવો ઘટનાની પ્રાપ્તિ માટે અનુકૂળ હોય તેવા બનાવોને તે ઘટના માટેનાં સાનુકૂળ બનાવો કહે છે. દા.ત. પાસો ઉછાળતા આંક {1,2.....6} મળી શકે. હવે આપણે ઘટના A ને પાસા પરના એકી સંખ્યા મળે તેમ વ્યાખ્યાયિત કરીએ તો નિદર્શ બિંદુઓ 1,3,5 એ ઘટના A માટે સાનુકૂળ બનાવો કહેવાય. સાદા શબ્દોમાં કોઈ ઘટના માટે આપણે જે બનાવ જોઈતો હોય તેને સાનુકૂળ બનાવ કહેવાય.

સમસંભવી ઘટનાઓ : જો કોઈ યદચ્છ પ્રયોગમાં દરેક ઘટના બનવાની સંભાવના એકસરખી હોય તો તે ઘટનાઓને સમસંભવી ઘટના કહે છે. દા.ત. ખામીરહિત પાસા ઉછાળતા તેના પર મળતો અંકની સંભાવના સરખી છે. આથી તેને "પાસો ઉછાળતા તેના પર મળતાં આંકની સંખ્યા" એ સમસંભવી ઘટના છે.

પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ : નિદર્શ અવકાશની ઘટનાઓમાંથી જ્યારે એક ઘટના બનવાથી બાકીની ઘટનાઓનું નિવારણ થાય ત્યારે આવી ઘટનાઓને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહે છે. દા.ત. સિક્કો ઉછાળતાં તેની પર છાપ {H} મળે તેને ઘટના A કહીએ અને કાંટો મળે તેને ઘટના B કહીએ તો ઘટના A અને ઘટના B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ થાય. આમ, બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ A અને B માટે $A \cap B$ અશક્ય ઘટના થાય.

નિઃશેષ ઘટનાઓ : જો કોઈ બે કે વધુ ઘટનાઓ એવી રીતે બને કે તે તમામ ઘટનાઓનાં તમામ ઘટકો એ બધા જ નિદર્શ બિંદુઓને આવરી લે તો તે બે કે વધુ ઘટનાઓને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય.

દા.ત. પાસા ઉછાળવાના પ્રયોગમાં બે ઘટના $A = \{1,2,3\}$ અને $B = \{4,5,6\}$ હોય તો ઘટના A અને B ને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહે છે.

નિરપેક્ષ ઘટના : જ્યારે એકથી વધુ ઘટનાઓ સાથે (અથવા એક પછી એક) બનતી હોય ત્યારે એક ઘટનાની પ્રાપ્તિની બીજી ઘટનાની પ્રાપ્તિ અથવા અપ્રાપ્તિ પર કોઈ અસર થાય નહિ ત્યારે તે બે ઘટનાઓને નિરપેક્ષ ઘટના કહે છે. દા.ત. એક સિક્કો અને એક પાસો સાથે ઉછાળતા સિક્કા પર છાપ મળે ત્યારે પાસા પર ગમે તે અંક મળી શકે છે. આમ બંને ઉપર મળતા બનાવો એકબીજાથી સ્વતંત્ર છે. આવી ઘટનાને નિરપેક્ષ અથવા સ્વતંત્ર ઘટનાઓ કહે છે.

આટલી પૂર્વભૂમિકા બાદ હવે આપણે સંભાવનાની વ્યાખ્યાઓ જોઈશું.

સંભાવનાની ગાણિતિક અથવા પ્રશિષ્ટ (પૂર્વસ્વીકૃત) વ્યાખ્યા :

જો કોઈ યદચ્છ પ્રયોગના સમસંભવી, પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ બનાવોની કુલ સંખ્યા n હોય અને તેમાંથી m બનાવો કોઈ ઘટના 'A'ને અનુકૂળ હોય તો ઘટના A બનવાની સંભાવના $\frac{m}{n}$ હોય છે જેને P(A) વડે દર્શાવાય છે. હવે જો આપણે ઘટના A બનવાને સફળતા ગણીએ અને સફળતાની સંભાવનાને P વડે દર્શાવીએ તો ઘટના A બનવાની સંભાવના નીચેના સૂત્રથી અપાય છે.

$$P(A) = \frac{\text{ઘટના A માટેના સાનુકૂળ બનાવોની સંખ્યા}}{\text{કુલ બનાવોની સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

હવે n બનાવોમાંથી m બનાવોમાં સફળતા મળે છે એટલે કે બાકીના $(n - m)$ બનાવોમાં નિષ્ફળતા મળે છે. નિષ્ફળતાની સંભાવનાને જો q વડે દર્શાવીએ તો $q = \frac{n-m}{n}$ થાય.

હવે જો નિદર્શ અવકાશમાં બધા જ બનાવો A માટે સાનુકુળ હોય તો m = n થાય અને

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1 \text{ થાય}$$

જ્યારે બધા જ બનાવો સાનુકુળ ન હોય તો m = 0 થાય અને $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$ થાય.

આમ, સંભાવનાની કિંમત હંમેશા 0 અને 1ની વચ્ચે જ આવે છે.

$0 \le P(A) \le 1$

$P(A)=1$ થાય તો A ને ચોક્કસ ઘટના કહે છે.

$P(A)=0$ હોય તો A ને અશક્ય ઘટના કહે છે.

મર્યાદાઓ :

(i) આ વ્યાખ્યા માત્ર સમસંભવી ઘટનાઓ માટે જ સાચી છે. એટલે કે એક પાસા પર ત્રણ બાજુ 1, 1 અને 1 લખીએ અને બાકીના આંકે 2,3,4 હોય તો આ ઘટનાઓ સમસંભવી બને નહિ.

(ii) અનન્ત બનાવો હોય તેવા પ્રયોગોમાં આ વ્યાખ્યા ઉપયોગી નથી.

(iii) સંભાવનાની વ્યાખ્યામાં ×સમસંભવી× શબ્દ આવે છે. જે સંભાવનાનો જે એક પ્રકાર છે. આમ સંભાવનાની વ્યાખ્યામાં જ સંભાવના શબ્દનો ઉપયોગ થાય છે.

ઉદાહરણ-1 : બે સિક્કાને એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો તેનાં પર એક છાપ મળે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ: બે સિક્કા ઉછાળતા કુલ $2^2=4$ નિદર્શ બિંદુઓ $\{HH, HT, TH, TT\}$ મળે. આમ કુલ બનાવો $n=4$ થાય. આપણે એક છાપ મળે તેને સફળતા કહીએ છીએ (તેને ઘટના A કહીએ તો) $\{HT, TH\}$ એમ બે રીતે એક વખત છાપ મળી શકે. આમ સાનુકૂળ બનાવો $m=2$ થશે.

$$\text{હવે સફળતાની સંભાવના} = P(A)=\frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}}=\frac{m}{n}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

આમ એક છાપ મળવાની સંભાવના $P(A)=\frac{1}{2}=0.5$ થાય.

ઉદાહરણ-2 : બે પાસાને ઉછાળતા તેના પર મળતા આંકનો સરવાળો "4" મળે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ: એક પાસા પર $\{1, 2, ...6\}$ એમ 6 આંક હોય.

આવા બે પાસા ઉછાળતા $6^2=36$ બનાવો બની શકે.

આ બનાવો $\{(1,1), (1,2), ...(1,6)$

$(2,1), (2,2), ...(2,6)$

.

.

.

.

$(6,1), (6,2), ...(6,6)\}$ હોય છે.

પાસા પરના આંકનો સરવાળો '4' હોય તેને અહીં સાનુકૂળ બનાવો કહીએ છીએ. આવા બનાવોની સંખ્યા $\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$ એમ 3 થાય.

હવે, બે પાસા ઉછાળતાં તેના પર મળતા આંકનો સરવાળો 4 હોય તેની સંભાવના =

$$\frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

ઉદાહરણ-3 : 52 પત્તાની જોડમાંથી યદચ્છ રીતે એક પત્તું લેતા તે

(i) લાલનું હોય

(ii) રાજા હોય

(iii) લાલનો રાજા હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

પત્તાની એક જોડમાં 52 પત્તા છે. આમ કુલ બનાવો $n = 52$ થાય. હવે તેમાં લાલનાં 13 પત્તા, રાજાના 4 પત્તા અને લાલનો રાજા 1 હોય છે. તે સાનુકૂળ બનાવો થાય.

(i) પત્તુ લાલનું હોય તેની સંભાવના $= \frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \frac{m}{n} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(ii) પત્તુ રાજા હોય તેની સંભાવના $= \frac{m}{n} = \frac{4}{52} = \frac{1}{3}$

(iii) પત્તુ લાલનો રાજા હોય $= \frac{m}{n} = \frac{1}{52}$ થાય.

નોંધ : n માંથી r વસ્તુની પસંદગી ${}^{n}C_{r}$ રીતે થાય.

(i) ${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

(ii) ${}^{n}C_{o} = {}^{n}C_{n} = 1$ થાય. ${}^{5}C_{0} = {}^{5}C_{5} = 1$

આમ બધી જ વસ્તુઓમાંથી શૂન્ય અથવા બધી જ વસ્તુ 1 પ્રકારે પસંદ થાય.

(iii) ${}^{n}C_{1} = {}^{n}C_{n-1} = n$ થાય. ${}^{5}C_{1} = {}^{5}C_{4} = 5$ થાય.

બધી જ વસ્તુમાંથી એક અથવા $(n-1)$ વસ્તુ કુલ n પ્રકારે પસંદ થાય.

(iv) ${}^{n}C_{1} = {}^{n}C_{n-r}$ થાય જેમ કે ${}^{10}C_{2} = {}^{10}C_{10-2} = {}^{10}C_{8}$

ઉદાહરણ-4 : 52 પત્તાની જોડમાંથી બે પત્તા લેવામાં આવે તો તે એક રાજા અને એક રાણી આવે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં 52 પત્તામાંથી 2 પત્તાની પસંદગી ${}^{52}C_{2}$ રીતે થાય.

${}^{52}C_{2} = \frac{52!}{2! \times (52-2)!} = \frac{52 \times 51 \times 50!}{2 \times 50!} = 1326$ કુલ બનાવો થાય.

કુલ 4 રાજામાંથી 1 રાજાની પસંદગી ${}^{4}C_{1}$ અને 4 રાણીમાંથી 1 રાણીની પસંદગી ${}^{4}C_{1}$ રીતે થાય.

આમ, રાજા અને રાણી આવવાનો કુલ પ્રકારો $= {}^{4}C_{1} \times {}^{4}C_{1} = 4 \times 4 = 16$ રીતે થાય.

સંભાવના $= \frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \frac{m}{n}$

$$=\frac{16}{1326}=\frac{8}{663}$$ થાય

ઉદાહરણ-5 : એક પેટીમાં 5 કાળા અને 4 સફેદ દડા છે, તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે દડા લેવામાં આવે તો

(i) બંને દડા કાળા હોવાની

(ii) એક દડો કાળો અને એક દડો સફેદ હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : પેટીમાં કુલ 5 કાળા + 4 સફેદ એમ 9 દડા છે.

9 માંથી 2 દડાની પસંદગી $^9C_2$ રીતે થાય.

$$^9C_2=\frac{9!}{2!(9-2)!}=\frac{9\times8\times7!}{2\times7!}=36$$ કુલ બનાવો બને. $\therefore\ n=36$

(i) બંને કાળા દડા $^5C_2\ =\ \frac{5\times4\times3!}{2\times3!}=10$ રીતે મળે. $\therefore\ m=10$

સંભાવના $=\ \frac{m}{n}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

(ii) એક દડો કાળો અને એક દડો સફેદ મળે.

(5માંથી 1 કાળો દડો મળે) અને (4માંથી 1 સફેદ દડો મળે)

$^5C_1\times{}^4C_1=5\times4=20$ રીતે મળે. $\therefore\ m=20$

સંભાવના $=\ \frac{m}{n}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

સંભાવનાની સંખ્યાકીય અથવા આનુભાવિક વ્યાખ્યા :

જો સમાન શરતો હેઠળ પ્રયોગનું ખૂબ વધારે વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે તો કોઈ એક ઘટના બનવાના પ્રયત્નો અને કુલ પ્રયત્નોના ગુણોત્તરનાં લક્ષને તે ઘટનાની સફળતાની સંભાવના કહે છે.

કુલ n પ્રયત્નોમાં m વખત ઘટના A બનતી હોય તો ઘટના A બનવાની સંભાવના નીચે મુજબ મળે છે.

$$P(A)=\lim_{n}\frac{m}{n}$$

સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા :

જો કોઈ યદચ્છ પ્રયોગનાં નિદર્શ અવકાશ S નાં ઉપગણ A હોય અને તેની સાથે સંકળાયેલ સંખ્યા $P(A)$ જો નીચેની પૂર્વધારણાઓનું સમાધાન કરે તો તેને ઘટના A ની સંભાવના કહે છે.

પૂર્વધારણા-1 : $0\le P(A)\le1$

($P(A)$ ની કિંમત 0 થી 1ની વચ્ચે હોવી જોઈએ.)

પૂર્વધારણા-2 : $P(S)=1$

પૂર્વધારણા-3 : જો $A_1,A_2,\ldots\ldots.A_n$ એ નિદર્શ અવકાશ S ની પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો

$$P(A_1\quad A_2\quad \ldots.\quad A_n)=P(A)+P(A_2)+\ldots\ldots.+P(A_n)$$ થાય.

શરતી સંભાવના : ધારો કે A અને B બે ઘટનાઓ હોય તો જ્યારે ઘટના A બની ગઈ હોય ત્યારબાદ ઘટના B બનવાની સંભાવનાને ઘટના B ની શરતી સંભાવના કહે છે. તેને $P(B/A)$ વડે દર્શાવાય છે. અને $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}, P(A)\neq 0$

એક શાળામાં ધોરણ 10માં 100 વિદ્યાર્થીઓ છે. તેમાંથી 60 છોકરાઓ છે જ્યારે 40 છોકરીઓ છે. વર્ગનાં 70 વિદ્યાર્થીઓ પાસ થાય છે અને નાપાસ થનાર છોકરાઓની સંખ્યા 20 છે.

હવે ઘટના Aને છોકરો હોય અને ઘટના Bને વિદ્યાર્થી પાસ હોય એમ કહીએ તો ઉપરની માહિતીને કોષ્ટકમાં નીચે મુજબ મૂકી શકાય.

	પાસ	નાપાસ	
છોકરો	40	20	60
છોકરી	30	10	40
	70	30	કુલ=100

નોંધ : સર્કલ કરેલ માહિતી બાદબાકીથી મળે છે. આમ $P(A)=\frac{60}{100}$ અને $P(B)=\frac{70}{100}$ થાય.

હવે જો વિદ્યાર્થી છોકરો છે તેમ આપેલું હોય તો તે નાપાસ થયો હોય તેની સંભાવના = $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ થાય.

આમ, $P\left(B/_{A}\right)=\frac{1}{3}$ થાય.

કેટલાંક પરિણામો :

(i) ઘટના A બનવાની સંભાવના = $P(A) = \frac{m}{n}$

(ii) $P(A')$ = ઘટના A ન બનવાની સંભાવના $P(A') = 1-P(A)$

આમ કોઈ પણ ઘટના A માટે $P(A) + P(A') = 1$ થાય.

(iii) બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A\cap B)=0$ થાય.

(iv) બે સ્વતંત્ર ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

(v) સંભાવનાનો સરવાળાનો નિયમ : જો ઘટના A અને ઘટના B નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ હોય અને તે બેમાંથી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ઉદ્ભવે તેની સંભાવના નીચેના સૂત્રથી દર્શાવાય છે.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

જો બે ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક હોય તો $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ થાય.

(vi) બે ઘટનાઓ A અને B માંથી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ન ઉદ્ભવે તેની સંભાવના નીચે મુજબ દર્શાવાય છે.

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'$$

$$=1-P(A\cup B) \text{ થાય.}$$

(vii) ઘટના A અને B બંને ન ઉદ્ભવે તેની સંભાવના

$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$$

(viii) બે ઘટનાઓમાંથી ઘટના A ઉદ્ભવે અને ઘટના B ન ઉદ્ભવે (એટલે કે ફક્ત ઘટના A જ બને) તેની સંભાવના

$P(A \quad B') = P(A) - P(A \quad B) = P(A - B)$ થાય.

(ix) ત્રણ ઘટના A, B અને C માટે સંભાવનાનો સરવાળાનો નિયમ નીચે મુજબ આપી શકાય.

$$P(A \quad B \quad C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \quad B) - P(A \quad C) - P(B \quad C) + P(A \quad B \quad C)$$

સંભાવનાનું ગુણાકારનું પ્રમેયઃ

નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે ઘટના A અને ઘટના B સાથે બનવાની સંભાવના, ઘટના A બને અને ઘટના A બની ગઈ છે તે શરતે ઘટના B બને તેના ગુણાકાર બરાબર થાય છે. તેને સંકેતમાં

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(B/A\right)$ વડે દર્શાવાય છે. હવે જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટના હોય તો A અને B બંનેની બનવાની સંભાવના

$P(A \quad B) = P(A).P(B)$ થાય.

ઉદાહરણ-6 : એક કોથળીમાં 4 લાલ અને 6 સફેદ દડા છે જ્યારે બીજી કોથળીમાં 5 લાલ અને 7 સફેદ દડા છે. કોઈ વ્યક્તિ યદચ્છ રીતે એક કોથળી પસંદ કરે અને તેમાંથી એક દડો પસંદ કરે તો તે દડો સફેદ આવવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં વ્યક્તિ સૌ પ્રથમ એક કોથળી પસંદ કરે છે. બેમાંથી એક કોથળીની પસંદગીની સંભાવના $= \frac{1}{2}$ થાય.

પ્રથમ કોથળીમાંથી એક સફેદ દડો પસંદ થવાની સંભાવના $= \frac{6}{10}$

બીજી કોથળીમાંથી એક સફેદ દડો પસંદ થવાની સંભાવના $= \frac{7}{12}$

એક સફેદ દડો આવે તે માટે, પ્રથમ કોથળી પસંદ થાય અને પ્રથમ કોથળીમાંથી ૧ સફેદ દડો પસંદ થાય

અથવા બીજી કોથળી પસંદ થાય અને બીજી કોથળીમાંથી ૧ સફેદ દડો પસંદ થાય હોવું જોઈએ.

$$\therefore \text{સંભાવના} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{12}$$

$$= \frac{6}{20} + \frac{7}{24}$$

$$= \frac{61}{120}$$

ઉદાહરણ-7 : એક કોથળીમાં 5 લાલ અને 6 સફેદ દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે એક પછી એક એમ બે દડા (1) પુરવણી સહિત અને (2) પુરવણી રહિત લેવામાં આવે તો બંને દડા સફેદ હોવાની સંભાવના શોધો.

નોંધ : પુરવણી સહિત નિદર્શન : જ્યારે બીજો દડો પસંદ કરતાં પહેલાં પ્રથમ પસંદ કરેલ દડો નિદર્શમાં પાછો મૂકવામાં આવે તો તેને પુરવણી સહિત નિદર્શન કહે છે. આમ આ નિદર્શનમાં દરેક પસંદગી વખતે નિદર્શના અવલોકનોની સંખ્યા સમાન રહે છે.

પુરવણી રહિત નિદર્શન : જ્યારે બીજો દડો પસંદ કરતાં પહેલાં પ્રથમ પસંદ કરેલ દડો નિદર્શમાં પાછો ન મૂકવામાં આવે તો તેને પુરવણી રહિત નિદર્શન કહે છે. આમ આ નિદર્શનમાં દરેક પસંદગી વખતે નિદર્શમાં કુલ સંખ્યા ઘટે છે.

જવાબ : કોથળીમાં 5 લાલ + 6 સફેદ = 11 કુલ દડા છે.

(i) પુરવણી સહિત નિદર્શન દ્વારા એક પછી એક એમ બે દડા લેવામાં આવે છે.

બંને દડા સફેદ આવે તે માટે (પ્રથમ દડો સફેદ આવે) અને (બીજો દડો સફેદ આવે)

સંભાવના $= \frac{^{6}C_1}{^{11}C_1} \times \frac{^{6}C_1}{^{11}C_1}$

$$= \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} = \frac{36}{121}$$

(ii) પુરવણી રહિત નિદર્શન દ્વારા એક પછી એક એમ બે દડા લેવામાં આવે ત્યારે

બંને દડા સફેદ આવે તે માટે, (પ્રથમ દડો સફેદ આવે) અને (બીજો દડો સફેદ આવે)

$$= \frac{^{6}C_1}{^{11}C_1} \times \frac{^{5}C_1}{^{10}C_1}$$

$$= \frac{3}{11}$$

ઉદાહરણ-8 : એક ટોપલીમાં 2 ગુલાબનાં, 3 ચંપાનાં અને 4 પારિજાતનાં ફૂલો છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે ત્રણ પુષ્પો લેવામાં આવે તો

(i) ત્રણે ફૂલો જુદા રંગનાં હોય

(ii) બે ફૂલો એક જ રંગનાં હોય અને એક ફૂલ જુદા રંગનું હોય.

(iii) ત્રણેય ફૂલો એક જ રંગનાં હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

ટોપલીમાં 2 ગુલાબ

3 ચંપો

4 પારિજાતનાં ફૂલો છે.

કુલ 9 ફૂલો છે.

9માંથી 3 ફૂલો $^{9}C_3$ રીતે પસંદ થાય.

આમ, કુલ બનાવો n = $^{9}C_3 = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$ બને.

(i) ત્રણેય ફૂલો જુદા રંગના હોય. તેનાં પ્રકારો

(એક ફૂલ ગુલાબનું હોય) અને (એક ફૂલ ચંપાનું હોય) અને (એક ફૂલ પારિજાતનું હોય)

સાનુકૂળ બનાવો $= {}^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_1$

$= 2 \times 3 \times 4$

$= 24$

અને ત્રણેય ફૂલો જુદા રંગનાં હોવાની સંભાવના $= \dfrac{{}^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_3} = \dfrac{24}{84} = \dfrac{2}{7}$ થાય.

(ii) બે ફૂલ એક જ રંગનાં હોય અને એક ફૂલ જુદા રંગનું હોય તેનાં પ્રકારો

બેમાંથી બે ફૂલ ગુલાબના હોય અને બાકીનાં 7 માંથી એક ફૂલ બીજા રંગનું હોય અથવા 3માંથી 2 ફૂલ ચંપાના હોય અને બાકીનાં 6 માંથી 1 ફૂલ અન્ય રંગનું હોય

અથવા 4માંથી 2 ફૂલ પારિજાતનું હોય અને બાકીનાં 5 માંથી 1 ફૂલ અન્ય રંગનું હોય

$\therefore$ સાનુકુળ બનાવો m

$= \left({}^2C_2 \times {}^7C_1\right) + \left({}^3C_2 \times {}^6C_1\right) + \left({}^4C_2 \times {}^5C_1\right)$

$= (1 \times 7) + (3 \times 6) + (6 \times 5)$

$= 7 + 18 + 30$

= 55 રીતે પસંદ થાય.

હવે બે ફૂલ એક જ રંગનાં હોય અને એક ફૂલ જુદા રંગનું હોય તેની સંભાવના

$= \dfrac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \dfrac{55}{84}$

(iii) ત્રણેય ફૂલો એક જ રંગનાં હોય તેવા બનાવો

અહીં ગુલાબનાં બે જ ફૂલો છે. તેમાંથી ત્રણ ફૂલોની પસંદગી થઈ શકે નહિ.

$\therefore$ સાનુકૂળ બનાવો m = (3માંથી 3 ફૂલ ચંપાનાં હોય) અથવા (4માંથી 3 ફૂલો પારિજાતનાં હોય)

$= {}^3C_3 + {}^4C_3$

$= 1 + 4$

= 5 બનાવો.

ત્રણેય ફૂલ એક જ રંગનાં હોય તેની સંભાવના

$= \dfrac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \dfrac{5}{84} = \dfrac{5}{84}$

ઉદાહરણ-9 : જો $P(A) = \dfrac{3}{4}, P(B) = \dfrac{5}{8}$ અને $P(A \cap B) = \dfrac{1}{2}$ હોય તો

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(B/A)$ (iii) $P(A' \cup B')$ શોધો.

જવાબ : બે ઘટનાઓ A અને B માટે

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6+5-4}{8}$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{8}$$

(ii) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(iii) $P(A' \cup B') = P(A \cap B)'$

$$= 1 - P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$P(A' \cup B') = \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ-10 : જો $3P(A) = 2P(B) = 4P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ હોય તો

(i)$P(A \cup B)$ (ii)$P(A' \cap B')$ (iii)$P(B/A')$ શોધો.

જવાબ : અહીં $3P(A) = 2P(B) = 4P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ આપેલ છે.

$\therefore 3P(A) = \frac{1}{3}$ $\quad\quad$ $\therefore P(A) = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$ થાય.

$2P(B) = \frac{1}{3}$ $\quad\quad$ $\therefore P(B) = \frac{1}{6}$ થાય.

$4P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ $\quad\quad$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ થાય.

હવે,

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{4+6-3}{36} = \frac{7}{36}$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{36}$$

(ii) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'$

$$=1-P(A\cup B)$$

$$=1-\frac{7}{36}=\frac{36-7}{36}$$

$$P(A'\cap B')=\frac{29}{36}$$

(iii) $P(B/A')=\dfrac{P(B\cap A')}{P(A')}$

$$=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)}{\left(1-\frac{1}{9}\right)}$$

$$=\frac{\frac{12-6}{12}}{\frac{9-1}{9}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{8}{9}}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{8}=\frac{9}{16}$$

$$P(B/A')=\frac{9}{16}$$

ઉદાહરણ-11 : જો A અને B બે ઘટનાઓ માટે $P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{3}$ અને $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ હોય તો

(i) ઘટના A અથવા B બને

(ii) ઘટના A ન બને અને ઘટના B ન બને.

(iii) ઘટના A ન બને અને ઘટના B બને.

(iv) ઘટના B' બને તે શરતે ઘટના A' બને તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ :

(i) ઘટના A અથવા B બને તેને સંકેતમાં $P(A\cup B)$ વડે દર્શાવાય.

હવે $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{6+4-3}{12}=\frac{7}{12}$$

(ii) ઘટના A ન બને અને ઘટના B ન બને એટલે

$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'$

$$=1-P(A\cup B)$$

$$=1-\frac{7}{12}$$

$P(A'\cap B')=\frac{5}{12}$

(iii) ઘટના B બને અને A ન બને એટલે $P(B\cap A')$

$P(B\cap A')=P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$P(B\cap A')=\frac{1}{12}$

(iv) ઘટના B' બને તે શરતે ઘટના A' બને તેની સંભાવના

$=P(A'/B')$

$P(A'/B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}$

$=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}$

$=\frac{5}{12}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$

$P(A'/B')=\frac{5}{8}$

ઉદાહરણ-12 : જો A અને B બે ઘટનાઓ માટે $P(A)=0.5$ અને $P(B)=0.4$ હોય અને જો

(i) A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(A\cap B')$ શોધો.

(ii) A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(A\cap B')$ શોધો.

જવાબ : ઘટના A અને ઘટના B જો પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો $P(A\cap B)=0$ થાય.

ઘટના A અને ઘટના B જો નિરપેક્ષ (સ્વતંત્ર) ઘટનાઓ હોય તો $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ થાય.

(i) બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ માટે

$P(A\cap B)=0$ થાય.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=0.5+0.4-0$

$P(A\cup B)=0.9$

$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=0.5-0$

$P(A\cap B')=0.5$

(ii) બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ માટે

$P(A\cap B)=P(A).P(B)=0.5\times 0.4=0.20$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.4-0.2=0.7$

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.2 = 0.3$

બેઈઝનું પ્રમેય (પ્રતીપ સંભાવના)

જો પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ $A_1, A_2, ...A_n$ બનવાની સંભાવના $P(A_1), P(A_2), ...P(A_n)$ હોય તથા કોઈ ઘટના E એવી બની શકતી હોય કે જેથી $P(E / A_1), ..., P(E / A_n)$ જાણતાં હોઈએ તો ઘટના E બની ગઈ છે તે શરતે ઘટના A_i બનવાની સંભાવનાનું સૂત્ર નીચે મુજબ છે. જેને બેઈઝનું પ્રમેય કહે છે.

$$P(A_1 / E) = \frac{P(A_1).P(E / A_1)}{P(A_1).P(E / A_1) + P(A_2) \bullet P(E / A_2) + ... + P(A_n) \bullet P(E/ A_n)}$$

ત્રણ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ A_1, A_2 અને A_3 માટે,

$$P(A_1 / E) = \frac{P(A_1).P(E / A_1)}{P(A_1).P(E / A_1) + P(A_2) \bullet P(E / A_2) + P(A_3) \bullet P(E/ A_3)}$$

ઉદાહરણ-13 : એક ફેક્ટરીમાં દરરોજ મશીન A દ્વારા 1000, B દ્વારા 1500 અને C દ્વારા 2000 એકમોનું ઉત્પાદન થાય છે. તેમનાં ઉત્પાદનમાં અનુક્રમે 3%, 2% અને 1% વસ્તુઓ ખામીવાળી બને છે. તો સમગ્ર ઉત્પાદનમાંથી યદચ્છ રીતે એક વસ્તુ લેવામાં આવે અને તે ખામીવાળી જ હોય તો તે મશીન Cમાંથી ઉત્પાદિત થઈ હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં વસ્તુ ખામીવાળી મળે તેને ઘટના E કહીએ અને ત્રણ મશીન દ્વારા વસ્તુનાં ઉત્પાદનને A, B, C કહીએ. દરરોજ કુલ $1000 + 1500 + 2000 = 4500$ વસ્તુઓ બને છે.

વસ્તુ મશીન Aમાંથી ઉત્પાદીત થાય તેની સંભાવના $P(A) = \frac{1000}{4500} = \frac{2}{9}$

વસ્તુ મશીન Bમાંથી બને તેની સંભાવના $P(B) = \frac{1500}{4500} = \frac{3}{9}$

વસ્તુ મશીન Cમાંથી બને તેની સંભાવના $P(C) = \frac{2000}{4500} = \frac{4}{9}$

મશીન Aનું ખામીપ્રમાણ 3% છે. આમ, $P(E / A) = \frac{3}{100}$

મશીન Bનું ખામીપ્રમાણ 2% છે. આમ $P(E / B) = \frac{2}{100}$

મશીન Cનું ખામીપ્રમાણ 1% છે. આમ $P(E / C) = \frac{1}{100}$.

હવે વસ્તુ મશીન A દ્વારા ઉત્પાદીત હોય અને ખામીવાળી હોય

$$= P(A).P(E / A) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{100} = \frac{6}{900}$$

વસ્તુ મશીન B દ્વારા ઉત્પાદીત હોય અને ખામીવાળી હોય

$$= P(B) \times P(E/ B) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{100} = \frac{6}{900}$$

વસ્તુ મશીન C દ્વારા ઉત્પાદીત હોય અને ખામીવાળી હોય

$$= P(C) \times P(E / C) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{100} = \frac{4}{900}$$

આમ કોઈ પણ મશીનમાંથી વસ્તુ ખામીવાળી મળે તેની કુલ સંભાવના

$$= \frac{6}{900}+\frac{6}{900}+\frac{4}{900}=\frac{16}{900}$$

હવે, વસ્તુ ખામીવાળી જણાઈ તો તે મશીન Cમાંથી ઉત્પાદીત હોય તેની સંભાવના

$$P(C/E)=\frac{P(C).P(E/C)}{P(A)P(E/A)+P(B).P(E/B)+P(C).P(E/C)}$$

$$=\frac{\frac{4}{900}}{\frac{16}{900}}$$

$$=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

આ જ દાખલાને ટૂંકમાં નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય.

વસ્તુ મશીનમાંથી પસંદ થવાની સંભાવના	**વસ્તુ ખામીવાળી હોવાની સંભાવના**	**વસ્તુ મશીનમાંથી પસંદ થાય અને ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના**
$P(A)=\frac{1000}{4500}=\frac{2}{9}$	$P(E/A)=\frac{3}{100}$	$P(A).P(E/A)=\frac{2}{9}\times\frac{3}{100}=\frac{6}{900}$
$P(B)=\frac{3}{9}$	$P(E/B)=\frac{2}{100}$	$P(B).P(E/B)=\frac{3}{9}\times\frac{2}{100}=\frac{6}{900}$
$P(C)=\frac{4}{9}$	$P(E/C)=\frac{1}{100}$	$P(C)\bullet P(E/C)=\frac{4}{9}\times\frac{1}{100}=\frac{4}{900}$
		વસ્તુ ખામીવાળી મળે તેની સંભાવના $=\frac{16}{900}$

$$P(C/E)=\frac{\text{વસ્તુ ત્રીજા મશીનમાંથી પસંદ થાય અને ખામીવાળી હોય}}{\text{વસ્તુ ખામીવાળી હોય}}$$

$$=\frac{P(C).P(E/C)}{P(A).P(E/A)+P(B).P(E/B)+P(C).P(E/C)}$$

$$=\frac{4/900}{16/900}$$

$$P(C/E)=\frac{1}{4}$$

ઉદાહરણ-14 : એક ફેક્ટરીમાં ત્રણ મશીનો A, B, C અનુક્રમે કુલ ઉત્પાદનનાં 30%, 30% અને 40% ઉત્પાદન કરે છે. જો તે મશીનો 3%, 4% અને 5% ખામીવાળી વસ્તુઓ બનાવતા હોય અને જો સમગ્ર ઉત્પાદનમાંથી યદચ્છ રીતે એક વસ્તુ લેવામાં આવે અને તે ખામીવાળી જણાય તો તે વસ્તુ મશીન A દ્વારા ઉત્પાદિત થઈ હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં વસ્તુ ખામીવાળી હોય તેને ઘટના E કહીશું અને ત્રણ મશીનો A, B અને Cમાંથી વસ્તુના ઉત્પાદનને P(A), P(B) અને P(C) કહીએ તો

વસ્તુ ચોક્કસ મશીનમાંથી ઉત્પાદીત થાય તેની સંભાવના	ચોક્કસ મશીનની વસ્તુ ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના	વસ્તુ ચોક્કસ મશીનમાંથી પસંદ થાય અને ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના
$P(A) = 30\% = \frac{3}{10}$	$P(E/A) = 3\% = \frac{3}{100}$	$P(A).P(E/A) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{9}{1000}$
$P(B) = 30\% = \frac{3}{10}$	$P(E/B) = 4\% = \frac{4}{100}$	$P(B).P(E/B) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{100} = \frac{12}{1000}$
$P(C) = 40\% = \frac{4}{10}$	$P(E/C) = 5\% = \frac{5}{100}$	$P(C).P(E/C) = \frac{4}{10} \times \frac{5}{100} = \frac{20}{1000}$

વસ્તુ ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના $= \left[\frac{9}{1000} + \frac{12}{1000} + \frac{20}{1000}\right] = \frac{41}{1000}$

હવે ખામીવાળી વસ્તુ A મશીન દ્વારા બની હોય તેની સંભાવના

$$P(A/E) = \frac{P(A).P(E/A)}{P(A).P(E/A) + P(B).P(E/B) + P(C).P(E/C)}$$

$$= \frac{\frac{9}{1000}}{\frac{41}{1000}} = \frac{9}{41}$$

ઉદાહરણ-15 : પેટી A માં 4 લાલ અને 3 સફેદ દડા છે. પેટી Bમાં 5 લાલ અને 4 સફેદ દડા છે અને પેટી Cમાં 3 લાલ અને 5 સફેદ દડા છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે એક પેટી પસંદ કરી તેમાંથી બે દડા લેવામાં આવે તો એક દડો લાલ અને એક દડો સફેદ આવવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ: અહીં ત્રણ પેટીમાંથી સૌપ્રથમ એક પેટી પસંદ કરવામાં આવે છે. 3માંથી એક પેટી પસંદ થવાની સંભાવના $= \frac{1}{3}$ થાય.

દડા	પેટી			કુલ
	A	B	C	
લાલ	4	5	3	12
સફેદ	3	4	5	12
કુલ	**7**	**9**	**8**	**24 કુલ દડા**

હવે એક લાલ અને એક સફેદ દડો પસંદ થવાને ઘટના E કહીએ તો

P(E) = (પેટી A પસંદ થાય અને તેમાંથી એક લાલ અને એક સફેદ દડો પસંદ થાય.) અથવા (પેટી B પસંદ થાય અને તેમાંથી એક લાલ અને એક સફેદ દડો પસંદ થાય.)

અથવા (પેટી C પસંદ થાય અને તેમાંથી એક લાલ અને એક સફેદ દડો પસંદ થાય.)

$$= P(A).P(E/A) + P(B).P(E/B) + P(C).P(E/C)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{{}^4C_1\times{}^3C_1}{{}^7C_2}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{{}^5C_1\times{}^4C_1}{{}^9C_2}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{{}^3C_1\times{}^5C_1}{{}^8C_2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{4\times3}{21}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{5\times4}{36}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{3\times5}{28}\right)$$

$$=\frac{4}{21}+\frac{5}{27}+\frac{5}{28}$$

$$=\frac{419}{756}$$

ઉદાહરણ-16 : 366 દિવસ ધરાવતા લીપ વર્ષમાં 53 શનિ-રવિની જોડ આવવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : એક અઠવાડીયાનાં 7 દિવસ અને વર્ષનાં 52 અઠવાડીયા લઈએ તો 364 દિવસો થાય. બાકીના બે દિવસો અઠવાડીયાનાં ગમે તે સળંગ દિવસો હોઈ શકે. એટલે કે તે સોમ-મંગળ, મંગળ-બુધ, બુધ-ગુરૂ, ગુરૂ-શુક્ર, શુક્ર-શનિ, શનિ-રવિ અને રવિ-સોમ માંથી કોઈ પણ એક જોડ હોઈ શકે.

આમ અહીં કુલ બનાવો. 7 રીતે બની શકે. જ્યારે સાનુકૂળ બનાવો શનિ-રવિની જોડ 1 રીતે બની શકે.

53 શનિ-રવિ આપવાની સંભાવના = $\frac{1}{7}$ થાય.

ઉદાહરણ-17 : A 5 માંથી 4 વખત, B 5 માંથી 3 વખત અને C 4 માંથી 2 વખત નિશાન વિંધી શકે છે. જો ત્રણે સાથે નિશાન વિંધે તો નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના શોધવી છે. એટલે કે A અથવા B અથવા C માંથી ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ નિશાન વિંધે તો નિશાન વિંધાયું ગણાય.

આમ આપણે $P(A\cup B\cup C)$ શોધવી પડે.

આનાથી વિરુદ્ધ A, B અને C નિશાન ન વિંધી શકે તેની સંભાવના શોધી કુલ સંભાવના 1માંથી બાદ કરતાં પણ $P(A\cup B\cup C)$ મળે.

હવે A નિશાન વિંધે તેની સંભાવના $P(A)=\frac{4}{5}$

A નિશાન ન વિંધે તેની સંભાવના $P(A')=1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

આ જ રીતે $P(B)=\frac{3}{5}\quad \therefore\ P(B')=\frac{2}{5}$

જ્યારે $P(C)=\frac{2}{4}\ \therefore\ P(C')=\frac{2}{4}$ થાય.

હવે ત્રણે સાથે નિશાન ન વિંધી શકે $=(A'\cap B'\cap C')$

$\ldots\ P(A'\cap B'\cap C') =\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}$

ત્રણે નિશાન ન વિંધી શકે તેની સંભાવના = $\frac{4}{100}$

નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના = 1 – નિશાન ન વિંધાય તેની સંભાવના

$$=1-P(A'\cap B'\cap C')$$

$$=1-\frac{4}{100}$$

નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના $P(A\cup B\cup C)=\frac{96}{100}$

ઉદાહરણ-18 : એક કુટુંબમાં 1 છોકરો અને 3 છોકરીઓ, બીજા કુટુંબમાં 2 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ અને ત્રીજા કુટુંબમાં 3 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ છે. જો પ્રત્યેક કુટુંબમાંથી યદચ્છ રીતે એક બાળક પસંદ કરવામાં આવે તો (i) ત્રણેય છોકરાઓ પસંદ થાય. (ii) એક છોકરી અને બે છોકરાઓ પસંદ થાય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં દરેક કુટુંબમાંથી એક બાળક પસંદ કરવાનું છે.

કુટુંબ	છોકરા	છોકરી	કુલ
I	1	3	4
II	2	2	4
III	3	2	5

(i) ત્રણેય છોકરાઓ પસંદ થાય એટલે કે,

પ્રથમ કુટુંબમાંથી છોકરો પસંદ થાય અને બીજા કુટુંબમાંથી છોકરો પસંદ થાય અને ત્રીજા કુટુંબમાંથી છોકરો પસંદ થાય

સંભાવના $=P(B_1)\times P(B_2)\times P(B_3)$

$$=\frac{{}^1C_1}{{}^4C_1}\times\frac{{}^2C_1}{{}^4C_1}\times\frac{{}^3C_1}{{}^5C_1}$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{80}=\frac{3}{40}$$

(ii) એક છોકરી અને બે છોકરા પસંદ થાય એટલે કે,

પ્રથમ કુટુંબમાંથી છોકરી પસંદ થાય અને બીજા, ત્રીજામાંથી છોકરો પસંદ થાય અથવા બીજા કુટુંબમાંથી છોકરી પસંદ થાય અને પહેલા, ત્રીજામાંથી છોકરો પસંદ થાય અથવા ત્રીજા કુટુંબમાંથી છોકરી પસંદ થાય અને પહેલા અને બીજા કુટુંબમાંથી છોકરો પસંદ થાય

સંભાવના $=P(G_1\cap B_2\cap B_3)+P(B_1\cap G_2\cap B_3)+P(B_1\cap B_2\cap G_3)$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}$$

$$=\frac{18}{80}+\frac{6}{80}+\frac{4}{80}=\frac{28}{80}=\frac{7}{20}$$

એક છોકરી અને બે છોકરાઓ પસંદ થવાની સંભાવના $=\frac{7}{20}$ થાય.

ઉદાહરણ-19 : એક પેટીમાં 6 લીલા તથા કેટલાંક સફેદ દડા છે. તેમાંથી 2 લીલા દડા લેવાની સંભાવના $\frac{1}{3}$ છે. તો સફેદ દડાની સંખ્યા શોધો.

જવાબ : અહીં બે લીલા દડા પસંદ કરવાની સંભાવના $\frac{1}{3}$ આપેલ છે. પણ કુલ દડાની સંખ્યા આપેલ નથી. ધારો કે તે x છે.

$$\text{બે લીલા દડા પસંદ થવાની સંભાવના} = \frac{\text{સાનુકૂળ બનાવો}}{\text{કુલ બનાવો}} = \frac{\text{m}}{\text{n}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{{}^{6}C_2}{{}^{x}C_2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{6\times 5}{2\times\left(\frac{x(x-1)}{2}\right)}$$

$$x(x-1) = 6\times 5\times 3$$

$$x(x-1) = 90$$

$$x^2 - x - 90 = 0$$

$$x^2 - 10x + 9x - 90 = 0$$

$$x(x-10) + 9(x-10) = 0$$

$$(x-10)(x+9) = 0$$

$x = -9$ અશક્ય છે. $\therefore\ (x-10) = 0$ $\therefore x = 10$ દડા

આમ કુલ દડાની સંખ્યા 10 થાય.

$\therefore$ સફેદ દડાની સંખ્યા = $10-6$ (લાલ દડાની સંખ્યા)

સફેદ દડા = 4 થાય.

ઉદાહરણ-20 : ધ્રુવ અને દેવ વારાફરતી સિક્કો ઉછાળે છે અને જેને પહેલી છાપ મળે તે જીતે છે. જો આ રમત છાપ ન મળે ત્યાં સુધી ચાલુ જ રહેતી હોય તો તેઓની જીતવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : સિક્કો ઉછાળતા છાપ (H) મળવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ થાય.

(i) ધ્રુવની જીતના પ્રકારો.

$$= \begin{pmatrix}\text{પહેલાં પ્રયત્નમાં} \\ \text{ધ્રુવ જીતે}\end{pmatrix} \text{અથવા} \begin{pmatrix}\text{પહેલા પ્રયત્નમાં ધ્રુવ} \\ \text{હારે અને બીજા પ્રયત્નમાં} \\ \text{દેવ હારે અને ત્રીજા પ્રયત્નમાં} \\ \text{ધ્રુવ જીતે}\end{pmatrix} \text{અથવા.....}$$

$$\text{સંભાવના} = P(H) + P(TTH) + P(TTTTH) + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^5 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots\ldots\right]$$

$\left[\text{ગુણોત્તર શ્રેણીનાં અનંત પદોનો સરવાળો } S = \frac{a}{1-r} \text{ માં } a = 1 \text{ અને } r = \left(\frac{1}{2}\right) \text{ લેતાં} \right]$

સંભાવના $\frac{1}{2}\left[\frac{a}{1-r}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{3}{4}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\right]$$

ધ્રુવની જીતવાની સંભાવના $=\frac{2}{3}$ થાય.

દેવની જીતવાની સંભાવના = 1 - ધ્રુવની જીતવાની સંભાવના = $1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$

ઉદાહરણ-21 : A અને B બે સ્વતંત્ર સાક્ષીઓ છે. A ની સાચુ બોલવાની સંભાવના 0.7 છે. જ્યારે Bની સાચુ બોલવાની સંભાવના 0.5 છે. જો A અને B બંને કોઈ ઘટના માટે સહમત થાય તો તે ઘટના સાચી હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : Aની સાચુ બોલવાની સંભાવના = P(A) = 0.7

$\therefore$ A ની સાચુ ન બોલવાની સંભાવના = P(A') = 1 – 0.7 = 0.3

B ની સાચુ બોલવાની સંભાવના = P(B) = 0.5

Bની સાચુ ન બોલવાની સંભાવના = P(B') = 1 – 0.5 = 0.5

બંને સહમત થાય = (બંને સાચુ બોલતા હોય) અથવા (બંને ખોટું બોલતાં હોય)

બંને સહમત થાય તેની સંભાવના = $P(A \cap B)$ અથવા $P(A' \cap B')$

$= P(A).P(B) + P(A').P(B')$

= (0.7) (0.5) + (0.3) (0.5)

= 0.35 + 0.15

= 0.50

બંને સહમત થાય તેની સંભાવના = 0.50

ઘટના સાચી હોવાની સંભાવના = $P(A \cap B)$

$= P(A).P(B)$

= 0.7 x 0.5

= 0.35

P (ઘટના સાચી હોય / બંને સહમત થાય)

$$= \frac{\text{P (ઘટના સાચી હોય અને બંને સહમત થાય.)}}{\text{P (બંને સહમત થાય.)}}$$

$$= \frac{0.35}{0.50}$$

$$= 0.70$$

સ્વાધ્યાય

1. નીચેનાં પદોની વ્યાખ્યા આપી ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

   1. યદચ્છ પ્રયોગ
   2. નિદર્શ અવકાશ
   3. ઘટના
   4. યોગ ઘટના
   5. છેદ ઘટના
   6. પૂરક ઘટના
   7. તફાવત ઘટના
   8. પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ
   9. સમસંભવી ઘટનાઓ
   10. નિઃશેષ ઘટના
   11. સાનુકૂળ બનાવો
   12. સંભાવના (ગાણિતિક વ્યાખ્યા)
   13. સંભાવના (સાંખ્યાકીય વ્યાખ્યા)
   14. સંભાવના (પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા)
   15. શરતી સંભાવના
   16. શાંત નિદર્શઅવકાશ
   17. અનંત નિદર્શ અવકાશ

2. નીચેનામાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો.

(i) ઘટના A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો

(1) $P(A \cap B) =$ _________ થાય.

(i) P(A).P(B) (ii) P(A) + P(B) (iii) 0

(2) P(A B) = ________ થાય.

(i) P(A).P(B) (ii) P(A) + P(B) (iii) 0

(ii) A અને B બે સમસંભવી ઘટનાઓ હોય તો

(i) ઘટના A બનવાની સંભાવના અને ઘટના B બનવાની સંભાવના સરખી થાય.

(ii) ઘટના A બનવાની સંભાવના અને ઘટના B બનવાની સંભાવના જુદુ-જુદી થાય.

(iii) ઉપરનાં બંને હોઈ શકે.

(iii) A અને B બે સ્વતંત્ર (નિરપેક્ષ) ઘટનાઓ હોય તો

(i) P(A B) = _______ થાય.

(i) $P(A).P(B)$ (ii) $P(A) + P(B)$ (iii) 0

(iv) કોઈ એક ઘટના બનવાની સંભાવના ________ની વચ્ચે હોય છે.

(i) $[-1,1]$ (ii) $[0,1]$ (iii) $[- \ , \ ]$

(v) નિદર્શઅવકાશની બધી જ ઘટનાઓની સંભાવનાનો સરવાળો હંમેશા ________થાય.

(i) 0 (ii) 1 (iii) 0થી 1ની વચ્ચે

(vi) પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટના માટે વિધાન સાચુ છે કે ખોટું તે જણાવો. ખોટા વિધાન માટે કારણ આપો.

(i) $P(A) = 0.4$ $P(B) = 0.4$ $P(C) = 0.2$

(ii) $P(A) = 0.6$ $P(B) = 0.5$ $P(C) = 0.1$

(iii) $P(A) = 0.6$ $P(B) = 0.4$ $P(A \quad B) = 0.3$

3. બે સિક્કા એકસાથે ઉછાળતાં તેના પર

(i) બે છાપ મળે તેની સંભાવના શોધો.

(ii) ઓછામાં ઓછી એક છાપ મળે (એક અથવા બે છાપ મળે) તેની સંભાવના શોધો.

4. બે પાસાને એકસાથે ઉછાળતા તેના પર મળતાં આંકોનો સરવાળો

(i) 7 હોય

(ii) ઓછામાં ઓછો 9 હોય

(iii) વધુમાં વધુ 10 હોય તેની સંભાવના શોધો.

5. બે પાસા ઊછાળતા તેનાં પર મળતાં આંકનો સરવાળો 2 અથવા 3થી ભાગી શકાય તેની સંભાવના શોધો.

6. ત્રણ સિક્કાઓ એકસાથે ઉછાળતાં તેની પર

(i) ત્રણ છાપ મળે

(ii) બે છાપ મળે અને એક કાંટો મળે

(iii) એક છાપ અને બે કાંટા મળે

(iv) ત્રણ કાંટા મળે તેની સંભાવના શોધો.

ઉપરની ચારેય ઘટનાઓ ભેગી મળે તો નિઃશેષ ઘટના બને કે નહિ ?

7. ત્રણ પાસાઓ એકસાથે ઉછાળતાં તેના પર મળતાં આંકનો સરવાળો 15 મળે તેની સંભાવના શોધો.

8. 52 પત્તાની એક જોડમાંથી યદચ્છ રીતે એક પત્તું લેવામાં આવે તો, (1) રાજાનું હોય (2) કાળીનું હોય (3) કાળીનો રાજા હોય (4) કાળી અથવા રાજા હોય તેની સંભાવના શોધો.

9. 52 પત્તાની એક જોડમાંથી બે પત્તા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો બે રાજા મળવાની સંભાવના શોધો.

10. એક પેટીમાં 7 લાલ અને 5 લીલા દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે દડાઓ લેવામાં આવે તો તે બંને દડાઓ લીલા હોવાની સંભાવના શોધો.

11. એક પેટીમાં 3 લાલ, 4 લીલા અને 5 પીળા દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે ત્રણ દડા લેતા (1) ત્રણેય દડા લાલ આવે (2) ત્રણેય જુદા રંગનાં આવે (3) ત્રણેય દડા લાલ આવે તેની સંભાવના શોધો.

12. 1થી 100 સુધીનાં આંકડાઓમાંથી એક આંકડો યદચ્છ રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે તો તે આંકડો (1) 5નો ગુણક હોય, (2) 7નો ગુણક હોય (3) 5 અને 7નો ગુણક હોય (4) 5 અથવા 7નો ગુણક હોય તેની સંભાવના શોધો.

13. કેરીની ટોપલીમાં 20 કેરીઓ છે જેમાંથી 3 કેરીઓ બગડેલી છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે 3 કેરી લેવામાં આવે તો.

(1) ઓછામાં ઓછી બે કેરી બગડેલી આવે

(2) વધુમાં વધુ બે કેરી બગડેલી આવે તની સંભાવના શોધો.

14. રમેશ, મહેશ અને સુરેશની દાખલો સાચો ગણવાની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}$ હોય તો

(1) દાખલો ખોટો ગણાય

(2) દાખલો સાચો ગણાય તેની સંભાવના શોધો.

15. એક પેટીમાં 4 સફેદ અને 5 કાળા દડા છે જ્યારે બીજી પેટીમાં 6 સફેદ અને 4 કાળા દડા છે. જો યદચ્છ રીત એક પેટી લેવામાં આવે અને તેમાંથી બે દડા લેવામાં આવે તો બંને દડા સફેદ આવે તેની સંભાવના શોધો.

16. એક પેટીમાં 3 સફેદ અને 4 કાળા, બીજી પેટીમાં 4 સફેદ અને 5 કાળા અને ત્રીજી પેટીમાં 3 સફેદ અને 6 કાળા દડા છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે એક પેટી પસંદ કરી બે દડા લેવામાં આવે તો એક સફેદ અને એક કાળો દડો આવે તેની સંભાવના શોધો.

17. એક કુટુંબમાં 1 છોકરો અને 3 છોકરી, બીજા કુટુંબમાં 2 છોકરા અને 2 છોકરી છે. જો દરેક કુટુંબમાંથી યદચ્છ રીતે એક બાળક પસંદ કરવામાં આવે તો (1) બંને છોકરીઓ હોવાની (2) એક છોકરો અને એક છોકરી હોવાની સંભાવના શોધો.

18. એક પેટીમાં 5 સફેદ અને 4 કાળા દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે એક-એક દડો વારાફરતી લેવામાં આવે છે. (1) જો પ્રથમવાર લીધેલા દડા પાછા મૂકવામાં આવે (2) જો પ્રથમવાર લીધેલા દડા પાછા ન મૂકવામાં આવે તો પ્રથમ પ્રયત્નમાં સફેદ અને બીજા પ્રયત્નમાં કાળો દડો મળવાની સંભાવના શોધો.

19. એક પેટીમાં 4 લાલ અને 6 પીળા દડા છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે એક દડો લઈ તેની જગ્યાએ બીજા રંગનો દડો પેટીમાં પાછો મૂકવામાં આવે છે. જો પેટીમાંથી હવે એક દડો લેવામાં આવે તો તે લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના શોધો.

20. ત્રણ વ્યક્તિ A, B અને C ની નિશાન વિંધવાની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{2}{3},\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{4}$ છે. તો નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના શોધો.

21. બે સ્વતંત્ર સાક્ષીઓ A અને B માંથી A સાચુ બોલે તેની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે. જ્યારે B ખોટું બોલે તેની સંભાવના $\frac{1}{4}$ છે. જો બંને એક વિધાન પર સહમત થતા હોય તો તે વિધાન સાચુ હોવાનુ સંભાવના શોધો.

22. એક ફેક્ટરીમાં ત્રણ મશીનો M_1, M_2 અને M_3 અનુક્રમે 1000, 2000 અને 3000 એકમોનું ઉત્પાદન કરે છે. તે મશીનમાં અનુક્રમે 3%, 2% અને 1% વસ્તુઓ ખામીવાળી બને છે. જો ઉત્પાદનમાંથી યદચ્છ રીતે એક વસ્તુ લેવામાં આવે અને જો તે ખામીવાળી જણાય તો તે વસ્તુ મશીન M_2 વડે બની હોય તેની સંભાવના શોધો.

23. એક ટીમમાં 7 પુરુષો અને અમુક સ્ત્રીઓ છે. જો તેમાંથી બે પુરુષો પસંદ થવાની સંભાવના $\frac{1}{5}$ હોય તો તેમાં સ્ત્રીઓની સંખ્યા શોધો. [8]

24. જો $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ અને $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ હોય તો (i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A' \cap B')$ (iii) $P(A / B)$ શોધો.

25. જો $P(A) = \frac{1}{3}$ $P(B) = \frac{1}{4}$ અને $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$ હોય તો (i) $P(A \cap B)$, (ii) $P(A / B)$, (iii) $P(B/ A)$, (iv) $P(A - B)$ તથા (v) $P(B - A)$ શોધો.

26. ત્રણ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ A, B અને C માટે જો $P(A) = 2P(B) = 3P(C)$ હોય તો (i) $P(A \cup B)$ તથા (ii) $P(A \cup B \cup C)$ શોધો.

ગણિતીય અપેક્ષા

અર્થ	*અસતત યદચ્છ ચલનું સંભાવના વિતરણ*
અસતત યદચ્છ ચલની ગાણિતિક અપેક્ષા	*દાખલાઓ*

આપણે સંભાવનાનો અભ્યાસ કર્યો. સંભાવનામાં આપણે કોઈ પણ યદચ્છ પ્રયોગ માટે નિદર્શ અવકાશ શોધી તેનાં પરથી કોઈ એક ઘટના બનવાની સંભાવના શોધતા હતા. દા.ત. બે સિક્કા ઉછાળતાં તેનાં પર બે છાપ મળવાની સંભાવના શોધવા માટે નિદર્શ અવકાશ {HH, HT, TH, TT} થાય અને કુલ ચાર બનાવોમાંથી એક બનાવ {HH} છે. આથી સંભાવના $\frac{1}{4}$ થાય.

હવે આ જ પ્રયોગને આપણે જુદી રીતે જોઈએ. બે સિક્કા ઉછાળતાં મળતી છાપની સંખ્યાને યદચ્છ ચલ x વડે દર્શાવીએ તો તેના પર ઓછામાં ઓછી શૂન્ય, એક અને વધુમાં વધુ બે છાપ મળી શકે. આમ યદચ્છ ચલ x એ 0, 1 અને 2 કિંમત ધારણ કરી શકે અને તેની સંભાવના અનુક્રમે

$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{4}$ થાય.

યદચ્છ ચલ નિદર્શ અવકાશ ઉપર વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. બે સિક્કા ઉછાળતાં તેનાં પર મળતી "છાપની સંખ્યા" અથવા "કાંટાની સંખ્યા"ને યદચ્છ ચલ કહી શકાય. આ જ રીતે બે પાસા પર મળતાં આંકનો સરવાળો, કોઈ પેટીમાંથી દડાની પસંદગી વગેરેને યદચ્છ ચલ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. યદચ્છ ચલની કિંમત નિદર્શ અવકાશ પરથી મળે છે અને તેને સંખ્યામાં દર્શાવી શકાય છે. સામાન્ય રીતે તેને x વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જો યદચ્છ ચલ અસતત કિંમતો ધારણ કરે તો તેને અસતત યદચ્છ ચલ કહે છે. દા.ત. રસ્તા પર અકસ્માતની સંખ્યા, ક્રિકેટમાં રનની સંખ્યા વગેરે. જ્યારે યદચ્છ ચલ સતત કિંમતો ધારણ કરે તો તેને સતત યદચ્છ ચલ કહે છે. દા.ત. કોઈ સ્થળનું તાપમાન, વ્યક્તિનું વજન વગેરે સતત ચલનાં ઉદાહરણો છે.

યદચ્છ ચલનું સંભાવના વિતરણ એટલે યદચ્છ ચલની જુદી-જુદી કિંમતો માટે સંભાવનાની વહેંચણી. બે સિક્કા ઉછાળતાં તેના પર "મળતી છાપની સંખ્યા" આ યદચ્છ ચલ માટે સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે.

છાપની સંખ્યા	0	1	2
સંભાવના	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

આ જ રીતે પાસા ઉછાળતાં તેનાં પર મળતા આંકનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ બને.

આંકની સંખ્યા	1	2	3	4	5	6
સંભાવના	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

અસતત યદચ્છ ચલનું સંભાવના વિતરણ :

કોઈ અસતત યદચ્છ ચલ x જુદી જુદી n કિંમતો $x_1, x_2, ...x_n$ ધારણ કરે તેની સંભાવના $P(x_1), P(x_2), ...P(x_n)$ હોય અને જો (i) $P(x_1) \geq 0$ (દરેક સંભાવનાની કિંમત શૂન્ય અથવા વધુ હોય). (ii) $\sum P(x_i) = 1$

તો વિધેય $P(x)$ ને યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય કહે છે.

ચલ x ની જુદી-જુદી કિંમતો અને તેને અનુરૂપ સંભાવનાઓ દર્શાવતા કોષ્ટકને અસતત યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ કહે છે.

અસતત યદચ્છ ચલની ગાણિતીય અપેક્ષા (અપેક્ષિત કિંમત) :

જો કોઈ અસતત યદચ્છ ચલ x જુદી-જુદી n કિંમતો $x_1, x_2, ...x_n$ ધારણ કરે તેની સંભાવના અનુક્રમે $P_1, P_2, ...P_n$ હોય તો ચલ xની ગણિતીય અપેક્ષા નીચે મુજબ અપાય છે.

$$E(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$$

$$E(x) = \Sigma x_i p_i$$

અસતત યદચ્છ ચલની અપેક્ષિત કિંમત એટલે તેની સરેરાશ કિંમત હોવાથી તેને μ વડે દર્શાવવામાં આવે છેઃ

$$\therefore E(x) = \mu$$

ગાણિતીય અપેક્ષાનાં ગુણધર્મો :

(i) $E(C) = C$ અચલ સંખ્યાની ગાણિતિક અપેક્ષા અચલ સંખ્યા જ રહે છે.

(ii) $E(cx) = c.E(x)$

કોઈ પણ ચલ x ને કોઈ અચલ સંખ્યા વડે ગુણી તેની ગાણિતિક અપેક્ષા તે ચલ xની ગાણિતિક અપેક્ષાને અચલ સંખ્યા વડે ગુણવા બરાબર થાય છે.

(iii) $E(ax + b) = aE(x) + b$

(iv) બે યદચ્છ ચલ x અને y માટે $E(x + y) = E(x) + E(y)$

બે ચલનાં સરવાળાની ગાણિતિક અપેક્ષા તે બે ચલની ગાણિતિક અપેક્ષાનાં સરવાળા બરાબર થાય છે.

(v) બે સ્વતંત્ર યદચ્છ ચલો x અને y માટે $E(x.y) = E(x).E(y)$

બે સ્વતંત્ર યદચ્છ ચલોનાં ગુણાકારની ગાણિતિક અપેક્ષા તે બે સ્વતંત્ર યદચ્છ ચલોની ગણિતીય અપેક્ષાનાં ગુણાકાર બરાબર થાય છે.

અસતત યદચ્છ ચલનું વિચરણ

ચલ x ની દરેક કિંમતના તેનાં મધ્યક $(+\mu)$ માંથી લીધેલા તફાવતોનાં વર્ગોની અપેક્ષિત કિંમતને ચલ x નું વિચરણ કહે છે. તેને v(x) વડે દર્શાવાય છે.

$$V(x) = E(x - \mu)^2$$

બે અસતત યદચ્છ ચલોનું સહવિચરણ

બે ચલો x અને y ની દરેક કિંમતનો તેનાં સંલગ્ન મધ્યકમાંથી લીધેલ તફાવતોનાં ગુણાકારની અપેક્ષીત કિંમતને ચલ x અને y નું સહ-વિચરણ કહે છે. જેને Cox(x, y) વડે દર્શાવાય છે.

$$Cov\ (x, y) = E = [(x - \overline{x})\ (y - \overline{y})]$$

વિચરણનાં ગુણધર્મો

(i) $V(x + a) = V(x)$

(ii) $V(ax + b) = a^2V(x)$

(iii) $Cov(x + a, y + b) = Cov(x,y)$

(iv) $Cov(ax,by) = ab\ Cov(x,y)$

(v) બે સ્વતંત્ર ચલ x અને y માટે $cov\ (x,y) = 0$

યદચ્છ ચલ x નો મધ્યક, વિચરણ અને સહવિચરણની ચર્ચામાં આપણે જોયું કે,

યદચ્છ ચલનો મધ્યક $E(x) = \mu$

વિચરણ, $V(x) = E(x - \mu)^2$

$= E(x^2 - 2x\mu + \mu^2)$

$= E(x^2) - 2\mu E(x) + \mu^2$

[પણ, $E(x) = \mu$ હોવાથી,]

$= E(x^2) - 2\mu.\mu + \mu^2$

$= E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2$

$= E(x^2) - \mu^2$

$V(x) = E(x)^2 - [E(x)]^2 \ [\because \mu = E(x)]$

બે ચલ x અને y વચ્ચેનું સહવિચરણ $Cov(x, y) = E(x - \overline{x})(y - \overline{y})$

$= E(xy - \overline{x}y - x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y})$

$= E(xy) - \overline{x}E(y) - \overline{y}E(x) + E(\overline{x}\,\overline{y})$

$= E(xy) - \overline{x}\,\overline{y} - \overline{y}\,\overline{x} + \overline{x}\,\overline{y}$

$= E(xy) - \overline{x}\,\overline{y}$

$Cov(x, y) = E(x, y) - E(x).E(y)$

બે સ્વતંત્ર ચલ x અને y માટે $E(x, y) = E(x).E(y)$ થાય

આમ બે સ્વતંત્ર ચલ x અને y માટે $Cov(x, y) = 0$ થાય.

ઉદાહરણ-1 બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળતા તેના પર મળતી છાપની સંખ્યાની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

જવાબ : બે સિક્કા ઉછાળતાં કુલ $\{HH, HT, TH, TT\}$ એમ કુલ 4 બનાવો બની શકે.

હવે આપણે ''છાપની સંખ્યા''ને યદચ્છ ચલ x કહીએ છીએ.

છાપની સંખ્યા (x_i)	**બનાવોની સંખ્યા**	**સંભાવના** (p_i)	$x_i p_i$
0	1	$\frac{1}{4}$	0
1	2	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
2	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
કુલ	**4**	**1**	$\frac{4}{4} = 1$

આમ, બે સિક્કા ઉછાળતા તેની પર છાપ મળવાની ગાણિતિક અપેક્ષા 1 થાય.

ઉદાહરણ-2 : એક પાસો ઉછાળતાં તેના પર મળતી આંકની ગાણિતિક અપેક્ષા શોધો.

જવાબ : અહીં પાસા પર મળતો અંગ યદચ્છ ચલ (x) થશે.

પાસા પર મળતો આંક x_i	સંભાવના p_i	$x_i p_i$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$
કુલ	$\Sigma p_i = 1$	$\sum x_i p_i$

આમ, પાસો ઉછાળતાં મળતાં આંકની ગાણિતિક અપેક્ષા $= E(x) = \Sigma x_i p_i$

$$= \frac{21}{6} = 3.5$$

$E(x) = 3.5$ થાય.

ઉદાહરણ-3 : બે પાસા ઉછાળતાં તેનાં પર મળતા આંકનાં સરવાળાની ગાણિતિક અપેક્ષા શોધો.

જવાબ: બે પાસા ઉછાળતાં કુલ 36 બનાવો બની શકે.

$$\{(1,1),(1,2),......(1,6)$$
$$(2,1),(2,2),.....(2,6)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$(6,1),(6,2),......(6,6)\}$$

પાસા પરનાં આંકનો લઘુત્તમ સરવાળો 2 જ્યારે મહત્તમ સરવાળો 12 થાય છે.

પાસા પરનાં આંકનો સરવાળો (x_i)	બનાવોની સંખ્યા	સંભાવના (p_i)	$x_i p_i$
2	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	2	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$
4	3	$\frac{3}{36}$	$\frac{12}{36}$
5	4	$\frac{4}{36}$	$\frac{20}{36}$
6	5	$\frac{5}{36}$	$\frac{30}{36}$
7	6	$\frac{6}{36}$	$\frac{42}{36}$
8	5	$\frac{5}{36}$	$\frac{40}{36}$
9	4	$\frac{4}{36}$	$\frac{36}{36}$
10	3	$\frac{3}{36}$	$\frac{30}{36}$
11	2	$\frac{2}{36}$	$\frac{22}{36}$
12	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{12}{36}$
કુલ	**36**	$\Sigma p_i = 1$	$\Sigma x_i p_i = \frac{252}{36}$

$$E(x) = \Sigma x_i p_i$$

$$= \left(2 \times \frac{1}{36}\right) + \left(3 \times \frac{2}{36}\right) + ... + \left(12 \times \frac{1}{36}\right)$$

$$= \frac{252}{36}$$

બે પાસા ઉછાળતાં તેના પર મળતા આંકના સરવાળાની ગાણિતિક અપેક્ષા $E(x) = 7$ થાય.

ઉદાહરણ-4 : ત્રણ સિક્કા ઉછાળતાં દરેક છાપ માટે 10 રૂ. મળતા હોય તો મળતી રકમની ગાણિતિક અપેક્ષા શોધો.

જવાબ : આગળનાં ઉદાહરણમાં છાપની સંખ્યા યદૃચ્છ ચલ હતી. પણ અહીં તેની સાથે કોઈક કિંમત (રૂ.10) જોડાય છે, તેથી "મળતી રકમ" યદૃચ્છ ચલ થશે.

ત્રણ સિક્કા ઉછાળતા કુલ 8 બનાવો બને.

{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

છાપની સંખ્યા	મળતી રકમ x_i	સંભાવના p_i	$x_i p_i$
0	0	$\frac{1}{8}$	0
1	10	$\frac{3}{8}$	$\frac{30}{8}$
2	20	$\frac{3}{8}$	$\frac{60}{8}$
3	30	$\frac{1}{8}$	$\frac{30}{8}$
કુલ		$\Sigma p_i = 1$	$\frac{120}{8}$

$E(x) = \Sigma x_i p_i = \frac{120}{8} = 15$ થાય.

$= \left(0 \times \frac{1}{8}\right) + \left(10 \times \frac{3}{8}\right) + \left(20 \times \frac{3}{8}\right) + \left(30 \times \frac{1}{8}\right)$

$= \frac{30}{8} + \frac{60}{8} + \frac{30}{8}$

$= \frac{120}{8}$

$E(x) = 15$ થાય.

ઉદાહરણ-5 : એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ હોય તો તેનાં પરથી K અને $E(x)$ શોધો.

x_i	1	2	3	4	5
સંભાવના (P_i)	0.1	0.2	K	0.2	0.3

જવાબ : કુલ સંભાવના 1 થાય.

$\therefore 0.1 + 0.2 + K + 0.2 + 0.3 = 1$

$K + 0.8 = 1$

$\therefore K = 0.2$

હવે $K = 0.2$ મૂકી દાખલો ગણતાં

x_i	p_i	$x_i p_i$
1	0.1	0.1
2	0.2	0.4
3	$K = 0.2$	0.6
4	0.2	0.8
5	0.3	1.5
કુલ	$\Sigma p_i = 1$	$\Sigma x_i p_i = 3.4$

$E(x) = \Sigma x_i p_i = 3.4$ થાય.

ઉદાહરણ-6 : એક યદૃચ્છ ચલ x માટે જો તેનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ હોય તો K અને E(x) શોધો.

x_i	0	1	2	3	4
સંભાવના	0.0625	K	0.375	K	0.0625

જવાબ :

કુલ સંભાવના 1 થાય.

$\therefore 0.0625 + K + 0.375 + K + 0.0625 = 1$

$2K + 0.5 = 1$

$2K = 0.5$

$K = 0.25$

x_i	p_i	$x_i p_i$
0	0.0625	00
1	K = 0.25	0.25
2	0.375	0.75
3	K = 0.25	0.75
4	0.0625	0.25
		$\Sigma x_i p_i = 2$

$E(x) = \Sigma x_i p_i = 2$

ઉદાહરણ-7 : નીચેના સંભાવના વિતરણ માટે K ની કિંમત શોધો. $E(x), E(x+1), E(2x+1)$ પણ શોધો.

x_i	5	6	7	8
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	K	$\frac{2}{10}$

જવાબ :

$\Sigma p_i = 1$ થાય.

$\therefore \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + K + \frac{2}{10} = 1$ થાય.

$\therefore K + \frac{6}{10} = 1$

$\therefore K = \frac{4}{10}$ થાય.

x_i	p_i	$x_i p_i$
5	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$
6	$\frac{3}{10}$	$\frac{18}{10}$
7	$K=\frac{4}{10}$	$\frac{28}{10}$
8	$\frac{2}{10}$	$\frac{16}{10}$
કુલ	$\Sigma p_i = 1$,	$\Sigma x_i p_i = \frac{67}{10}$

$$E(x) = \Sigma x_i p_i = \frac{67}{10}$$

હવે $E(x+1) = E(x) + 1$

$$= \frac{67}{10} + 1$$

$$E(x+1) = \frac{77}{10}$$

અને $E(2x+1) = 2E(x) + 1$

$$= 2\left(\frac{67}{10}\right) + 1$$

$$= \frac{134}{10} + 1$$

$$E(2x+1) = \frac{144}{10} = 14.4$$

ઉદાહરણ-8 : નીચે આપેલા સંભાવના વિતરણ પરથી K, $E(x)$, $E(x^2)$ અને $V(x)$ શોધો.

x_i	–2	–1	0	1	2	3
p_i	K	$\frac{2}{15}$	2K	$\frac{4}{15}$	3K	$\frac{1}{5}$

જવાબ : $\Sigma pi = 1$ થાય.

$$\therefore K + \frac{2}{15} + 2K + \frac{4}{15} + 3K + \frac{1}{5} = 1$$

$$6K + \frac{9}{15} = 1$$

$$6K = 1 - \frac{9}{15}$$

$$6K = \frac{6}{15}$$

$$K = \frac{1}{15}$$

x_i	p_i	$x_i p_i$	$(x_i)(x_i p_i)$
-2	$K = \frac{1}{5}$	$\frac{-2}{15}$	$\frac{4}{15}$
-1	$\frac{2}{15}$	$\frac{-2}{15}$	$\frac{2}{15}$
0	$2K = \frac{2}{15}$	0	0
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$
2	$3K = \frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{12}{15}$
3	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$	$\frac{27}{15}$
	$\Sigma p_i = 1$	$\Sigma x_i p_i = 1$	$\Sigma\left(x_i^2 p_i\right) = \frac{49}{15}$

$$E(x) = \Sigma(x_i p_i) = 1$$

હવે, $E(x^2) = \Sigma x_i^2 p_i$

$$E(x^2) = \frac{49}{15}$$

અને $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$$= \frac{49}{15} - (1)^2$$

$$= \frac{49}{15} - 1$$

$$V(x) = \frac{34}{15}$$

ઉદાહરણ-9 : એક પેટીમાં 4 લાલ અને 6 લીલા દડા છે. તેમાંથી 2 દડા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે તો લાલ દડા આવવાની ગાણિતિક અપેક્ષા શોધો.

જવાબ : અહીં 4 લાલ, 6 લીલા એમ કુલ 10 દડા છે.

અહીં લાલ દડાની સંખ્યા યદચ્છ ચલ છે અને તે 0, 1 અથવા 2 કિંમત ધારણ કરી શકે.

યદૃચ્છ ચલ (x)	સંભાવના (P_i)	$x_i p_i$
0	$\frac{{}^4C_0 \times {}^6C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{1\times 15}{45} = \frac{5}{15}$	0
1	$\frac{{}^4C_1 \times {}^6C_1}{{}^{10}C_2} = \frac{4\times 6}{45} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$
2	$\frac{{}^4C_2 \times {}^6C_1}{{}^{10}C_2} = \frac{6\times 0}{45} = \frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$
		$\Sigma(x_i p_i) = \frac{12}{15}$

$$E(x) = \Sigma(x_i p_i) = \frac{12}{15}$$

ઉદાહરણ-10 : એક પેટીમાં 4 લાલ અને 6 લીલા દડા છે. તેમાંથી યદૃચ્છ રીતે બે દડા લેવામાં આવે છે. જો પ્રત્યેક લાલ દડા દીઠ 10 રૂ. મળતા હોય અને પ્રત્યેક લીલા દડા દીઠ 5 રૂ. આપવા પડતાં હોય તો મળતી રકમની ગાણિતિક અપેક્ષા શોધો.

જવાબ : અહીં દડાની સાથે જોડાયેલી રકમ આપણો યદૃચ્છ ચલ બનશે.

કુલ 10માંથી 2 દડા લેવામાં આવે છે.

લાલ દડાની સંખ્યા	મળતી રકમ (x_i)	સંભાવના (p_i)	$x_i p_i$
0	−10	$\frac{{}^4C_2 \times {}^6C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{1\times 15}{45} = \frac{5}{15}$	$\frac{-50}{15}$
1	5	$\frac{{}^4C_1 \times {}^6C_1}{{}^{10}C_2} = \frac{4\times 6}{45} = \frac{8}{15}$	$\frac{40}{15}$
2	20	$\frac{{}^4C_2 \times {}^6C_0}{{}^{10}C_2} = \frac{6\times 1}{45} = \frac{2}{15}$	$\frac{40}{15}$
			$\sum x_i p_i = \frac{30}{15} = 2$

ગાણિતિક અપેક્ષા $= E(x) = \Sigma x_i p_i$

$$= \frac{30}{15} = 2$$

$E(x) = 2$

નોંધ : અહીં બે દડા પસંદ કરવામાં આવે છે અને 0 લાલ દડા મળે એટલે કે 2 લીલા દડા મળે. પ્રત્યેક લીલા દડા માટે 5 રૂ. આપવા પડતા હોવાથી 0ની સામેનાં ખાનામાં −10 રૂ. લખેલ છે.

ઉદાહરણ-11 : એક પેટીમાં 4 કાળા અને 2 સફેદ દડા છે. તેમાંથી યદૃચ્છ રીતે બે દડા લેવામાં આવે છે. જો પ્રત્યેક કાળા દડા દીઠ 20 રૂ. મળતા હોય અને રમત સમતોલ રાખવી હોય તો પ્રત્યેક સફેદ દડા માટે કેટલા રૂ. આપવા પડે ?

જવાબ : રમત સમતોલ રાખવી એટલે મળતી રકમની ગાણિતિક અપેક્ષા $E(x) = 0$ થાય.

ધારો કે પ્રત્યેક સફેદ દડા માટે a રૂ. ચૂકવવા પડે છે.

કાળા દડાની સંખ્યા	**મળતી રકમ** (x_i)	**સંભાવના** (p_i)	$(x_i p_i)$
0	$-2a$	$\frac{{}^4C_0 \times {}^2C_2}{{}^6C_2} = \frac{1\times1}{15} = \frac{1}{15}$	$\frac{-2a}{15}$
1	$20-a$	$\frac{{}^4C_1 \times {}^2C_1}{{}^6C_2} = \frac{4\times2}{15} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}(20-a)$
2	40	$\frac{{}^4C_2 \times {}^2C_0}{{}^6C_2} = \frac{6\times1}{15} = \frac{6}{15}$	$\frac{240}{15}$
		$\Sigma p_i = 1$	

મળતી રકમની ગાણિતિક અપેક્ષા $= E(x) = \Sigma x_i p_i$

$$= \frac{-2a}{15} + \frac{8}{15}(20-a) + \frac{240}{15}$$

$$= \frac{-2a}{15} + \frac{160}{15} - \frac{8a}{15} + \frac{240}{15}$$

$$= \frac{-10a}{15} + \frac{400}{15}$$

હવે રમત સમતોલ રાખવી છે એટલે $E(x) = 0$ મૂકતાં

$$0 = \frac{-10a + 400}{15}$$

$$\therefore 10a = 400$$

$$\alpha = \frac{400}{10} = 40$$

$$\therefore\ a = 40$$

$\therefore$ આમ પ્રત્યેક સફેદ દડા માટે રૂ. 40 ચૂકવીએ તો રમત સમતોલ થાય.

ઉદાહરણ-12 : એક પેટીમાં 7 સારા અને 2 ખામીવાળા સ્ક્રુ છે. જો તેમાંથી યદચ્છ 2 સ્ક્રુ લેવામાં આવે તો ખામીવાળા સ્ક્રુની અપેક્ષિત સંખ્યા શોધો.

જવાબ :

ખામીવાળા સ્ક્રુની સંખ્યા (x_i)	**સંભાવના**	$x_i p_i$ (p_i)
0	$\frac{{}^2C_0 \times {}^7C_2}{{}^9C_2} = \frac{21}{36}$	0
1	$\frac{{}^2C_1 \times {}^7C_1}{{}^9C_2} = \frac{14}{36}$	$\frac{14}{36}$
2	$\frac{{}^2C_2 \times {}^7C_0}{{}^9C_2} = \frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
	$\Sigma p_i = 1$	$\Sigma x_i p_i = \frac{16}{36}$

ખામીવાળા સ્ક્રૂની અપેક્ષિત સંખ્યા = $E(x) = \Sigma x_i p_i = \frac{16}{36}$

ઉદાહરણ-13 : એક પેટીમાં 1 નંબરવાળી એક, 2 નંબરવાળી બે, 3 નંબરવાળી ત્રણ અને 4 નંબરવાળી ચાર એમ કુલ 10 ટિકિટો છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે ટિકિટો લેતાં તેનાં પર મળતાં આંકના સરવાળાની ગાણિતિક અપેક્ષા શોધો.

જવાબ : અહીં ટિકિટો પર મળતા આંકનો સરવાળો યદચ્છ ચલ છે અને તે ઓછામાં ઓછો ત્રણ અને વધુમાં વધુ 8 હોઈ શકે.

આપણે આ સરવાળો મળવાની સંભાવના અને તેની ગાણિતિક અપેક્ષા શોધીશું.

ટિકિટ પર મળતો આંક	**સરવાળો** (x_i)	**સંભાવના** (p_i)	$x_i p_i$
$(1,2)$	3	$\frac{{}^1C_1 \times {}^2C_1}{{}^{10}C_2} = \frac{2}{45}$	$\frac{6}{45}$
$(1,3)$	4	$\frac{\left({}^1C_1 \times {}^3C_1\right)}{{}^{10}C_2} = \frac{3}{45}$	$\frac{12}{45}$
$(2,2)$	4	$\frac{{}^2C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{1}{45}$	$\frac{4}{45}$
$(1,4)$	5	$\frac{\left({}^1C_1 \times {}^4C_1\right)}{{}^{10}C_2} = \frac{4}{45}$	$\frac{20}{45}$
$(2,3)$	5	$\frac{\left({}^2C_1 \times {}^3C_1\right)}{{}^{10}C_2} = \frac{6}{45}$	$\frac{30}{45}$
$(2,4)$	6	$\frac{\left({}^2C_1 \times {}^4C_1\right)}{{}^{10}C_2} = \frac{8}{45}$	$\frac{48}{45}$
$(3,3)$	6	$\frac{{}^3C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{3}{45}$	$\frac{3}{45}$
$(3,4)$	7	$\frac{\left({}^3C_1 \times {}^4C_1\right)}{{}^{10}C_2} = \frac{12}{45}$	$\frac{84}{45}$
$(4,4)$	8	$\frac{{}^4C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{6}{45}$	$\frac{48}{45}$
			$\Sigma(x_i p_i) = \frac{255}{45}$

ટિકિટ પર મળતા અંકોના સરવાળાની ગાણિતિક અપેક્ષા

$E(x) = \Sigma(x_i p_i)$

$= \frac{255}{45} = 5.67$

$E(x) = 5.67$

ઉદાહરણ-14 : એક લોટરીમાં 100 રૂ. ની એક એવી 1000 ટિકિટો વેચાઈ છે. જો તેમાં 70,000 રૂ.નું એક જ ઇનામ મળતું હોય તો જેણે એક ટિકિટ લીધી છે તેને મળતી રકમની ગાણિતિક અપેક્ષા શોધો.

જવાબ : અહીં 1000 ટિકિટમાંથી 1 ટિકિટ ઇનામવાળી મળે તેની સંભાવના $\frac{1}{1000}$ થાય અને ટિકિટ પર ઇનામ ન મળે તેની સંભાવના $\frac{999}{1000}$ થાય.

મળતી રકમને સંભાવના સાથે નીચે મુજબ ગોઠવી શકાય.

અહીં એક ટીકીટ ખરીદનાર વ્યક્તિને મળતી રકમ યદચ્છ ચલ બનશે.

તેને ઈનામ ન મળે તો 100 રૂા ગુમાવશે.

અને જો તેને તો ઇનામ મળે તો તેને 70,000 – 100 = 69,900 રૂ. મળે.

મળતી રકમ x_i	**સંભાવના** (p_i)	$x_i p_i$
-100	$\frac{999}{1000}$	-99.90
$69{,}900$	$\frac{1}{1000}$	69.90
	$\Sigma p_i = 1$	$\Sigma(x_i p_i) = -30$

$$E(x) = \Sigma(x_i p_i)$$

$$= -30$$

નોંધ : વ્યક્તિએ 100 રૂ. આપી ટિકિટ ખરીદી છે. આથી ઇનામ 70000 માંથી 100 રૂ. બાદ કરતા મળતી રકમ 69,900 રૂ. થશે.

ઉદાહરણ-15 : એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ હોય તો નીચેની કિંમતો શોધો.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.05	0.15	0.30	0.30	0.20

(i) $E(x)$ (ii) $E(2x-3)$ (iii) $E(x^2)$ (iv) $V(x)$ (v) $V(3x+2)$

જવાબ:

x_i	p_i	$x_i\ p_i$	$x_i^2 p_i$
0	0.05	00	00
1	0.15	0.15	0.15
2	0.30	0.60	1.20
3	0.30	0.90	2.70
4	0.20	0.80	3.20
		2.45	7.25

(i) $E(x) = \Sigma x_i p_i$

$E(x) = 2.45$

(ii) $E(2x - 3) = 2E(x) - 3$

$= 2(2.45) - 3$

$= 4.90 - 3$

$E(x^2) = 1.90$

(iii) $E(x^2) = \Sigma x_i^2 p_i = 7.25$

(iv) $V(x) = E(x)^2 - [E(x)]^2$

$= (7.25) - [2.45]^2$

$= 7.25 - (6.0045)$

$V(x) = 1.2475$

(v) $V(3x + 2) = 3^2 v(x)$

$= 9v(x)$

$= 9(1.2475)$

$V(x) = 11.2275$

ઉદાહરણ-16 : એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ હોય તો $E(x)$, $E(x^2)$, $E(2x^2 + 3x - 4), V(2x - 5)$ શોધો.

x	−2	−1	0	1	2	3
P_i	0.1	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1

જવાબ :

x_i	p_i	$x_i\ p_i$	$x_i^2 p_i$	
	0	0.05	00	00
	−2	.1	−0.2	0.4
	−1	.1	−0.1	.1
	0	.2	00	00
	1	.3	0.3	0.3
	2	.2	0.4	0.8
	3	.1	0.3	0.9
		$\Sigma p_i = 1$	.7	2.5

(i) $E(x) = \Sigma x_i p_i = 0.7$

(ii) $E(x^2) = \Sigma x_i^2 p_i = 2.5$

(iii) $E(2x^2 + 3x - 4)$

$= 2E(x^2) + 3E(x) - 4$

$= 2(2.5) + 3(0.7) - 4$

$= 5 + 2.1 - 4$

$= 7.1 - 4$

$\therefore\ 3.1$

(iv) $V(2x-5) = 2^2 V(x)$

પણ $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= 2.50 - (0.7)^2$

$= 2.50 - 0.49$

$\therefore\ 2.01$

$\therefore V(2x-5) = 2^2 V(x) = 4V(x) = 4(2.01) = 8.04$

ઉદાહરણ-17 : બે સ્વતંત્ર ચલ x અને y માટે જો $E(x) = 2.5$, $E(y) = 5.2$, $V(x) = 14.2$ અને $V(y) = 35.5$ હોય તો (i) E(2x + 9) (ii) E(5+3y) (iii) E(4x – y) (iv) $E(x)^2$ (v) V(x – y)ની કિંમત મેળવો.

જવાબ:

(i) $E(2x + 9) = 2E(x) + 9$

$= 2(2.5) + 9 = 5 + 9 = 14$

(ii) $E(5 + 3y) = 5 + 3E(y)$

$= 5 + 3(5.2) = 5 + 15.6 = 20.6$

(iii) $E(4x - y) = 4E(x) - E(y)$

$= 4(2.5) - 5.2$

$= 10 - 5.2$

$\therefore 4.8$

(iv) $E(x^2)$ શોધવા માટે, $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$14.2 = E\left(x^2\right) - (2.5)^2$

$14.2 = E(x^2) - 6.25$

$14.20 + 6.25 = E(x^2)$

$E(x^2) = 20.45$

(v) $V(x - y) = V(x) + V(y)$

$= 14.2 + 35.5$

$= 49.7$

ઉદાહરણ-18 : એક વસ્તુનાં છેલ્લા 100 દિવસની માંગનું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે મુજબ મળ્યું. તે પરથી અપેક્ષિત માંગ શોધો.

માંગ (x_i)	10	11	12	13	14	15
દિવસ	10	20	30	20	10	10

જવાબ : અહીં "માંગ" એ યદચ્છ ચલ છે અને તેનાં દિવસો પરથી તેની સંભાવના શોધવી પડે.

માંગ (x_i)	દિવસો	સંભાવના p_i	$x_i p_i$
10	10	$\frac{10}{100} = 0.1$	1.0
11	20	0.2	2.2
12	30	0.3	3.6
13	20	0.2	2.6
14	10	0.1	1.4
15	10	0.1	1.5
	100	$\Sigma p_i = 1$	**12.3**

માંગની અપેક્ષિત કિંમત $E(x) = \Sigma x_i p_i$

$E(x) = 12.3$

અપેક્ષીત માંગ એટલે સરેરાશ માંગ = 12.3

સ્વાધ્યાય

1. નીચેનાં પદો વ્યાખ્યાયિત કરો.
   (1) યદચ્છ ચલ
   (2) સતત યદચ્છ ચલ
   (3) અસતત યદચ્છ ચલ
   (4) યદચ્છ ચલનું સંભાવના વિતરણ
   (5) ગણિતીય અપેક્ષા
2. ગણિતીય અપેક્ષાની વ્યાખ્યા આપી તેનો ગુણધર્મો જણાવો.
3. સંભાવના વિતરણની જરૂરી શરતો જણાવો.
4. જો $E(x) = 15$ હોય તો $E(2x-3)$ શોધો.
5. જો $E(x) = 2$ અને $E(y) = 3$ હોય તો $E(2x+3y)$ શોધો.
6. જો x અને y બે સ્વતંત્ર ચલ હોય અને $E(x) = 3.5$ અને $E(y) = 4.5$ હોય તો $E(xy)$ શોધો.
7. જો $E(x) = 5$ અને $E(x^2) = 37$ હોય તો $V(x)$ શોધો.
8. જો $V(x) = 3$ હોય તો $V(2x)$, $V(3x-2)$, $V(x+3)$ અને $V(5-x)$ શોધો.
9. જો યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ હોય તો (i) E(x) (ii) $E(x^2)$ (iii) V(x) (iv) E(3x – 4)
   (v) $E(3x^2 + 4x - 5)$ શોધો.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

10. એક વસ્તુની માંગનું વિતરણ નીચે મુજબ હોય તો
   (i) P (ii) E(x) (iii) E(3x + 2) શોધો.

x_i	10	11	12	13	14
p_i	0.2	P	0.3	P	0.1

11. કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યાનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ હોય તો p અને $E(x)$ શોધો.

કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા (x)	0	1	2	3	4
સંભાવના (p_i)	$\frac{1}{10}$	P	$\frac{2}{10}$	P	$\frac{1}{10}$

12. એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ હોય તો તે પરથી P અને E(x) શોધો.

x_i	–2	–1	0	1	2
p_i	P	2P	3P	4P	5P

13. એક પેટીમાં 2 લાલ અને 3 લીલા દડા છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે દડા લેવામાં આવે તો મળતા લાલ દડાની અપેક્ષીત કિંમત શોધ.

14. એક પેટીમાં 3 લાલ અને 4 લીલા દડા છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે 3 દડા લેવામાં આવે અને જો દરેક લાલ દડા માટે 15 રૂ. મળતા હોય અને લીલા દડા માટે 10 રૂ. આપવા પડતા હોય તો મળતી રકમની ગણિતીય અપેક્ષા શોધો.

15. એક પેટીમાં 6 કાળા અને 4 સફેદ દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે દડા લેવામાં આવે છે. જો એક કાળા દડા માટે 20 રૂ. આપવા પડતા હોય અને રમતને સમતોલ રાખવી હોય તો પ્રત્યેક સફેદ દડા માટે કેટલા રૂપિયા મળવા જોઈએ.

16. એક પેકેટમાં 18 સારા અને 2 ખામીવાળા એમ કુલ 20 સ્ક્રૂ છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે 2 સ્ક્રૂ લેવામાં આવે તો ખામીવાળા સ્ક્રૂની ગણિતીય અપેક્ષા શોધો.

17. એક પેકેટમાં 1, 2, 3, 4, 5 લખેલી કુલ 5 ટિકિટો છે. જો તેમાંથી યદચ્છ રીતે બે ટિકિટો લેવામાં આવે તો તેની પર મળતા અંકના સરવાળાની ગાણિતીય અપેક્ષા શોધો.

18. એક વ્યક્તિ રૂ.1,00,000 નો વીમો ઉતરાવે છે. તે પ્રીમિયમ તરીકે 100 રૂ. ભરે છે. જો તેની ઉંમરવાળા વ્યક્તિની મૃત્યુની સંભાવના 0.01 હોય તો વીમા કંપનીને મળતી રકમની ગણિતીય અપેક્ષા શોધો.

સંભાવના

જવાબો

2. (i) (i) 0 (2) P(A) + P(B)
   (ii) (i)
   (iii) P(A) . P(B)
   (iv) [0, 1]
   (v) 1
   (vi) (i) સાચુ
   (ii) ખોટું (સંભાવનાની કિંમત 1 થી વધુ હોઈ શકે નહિ.)
   (iii) ખોટું (બે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ માટે $P(A \cap B) = 0$ થાય.)

3. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$

4. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{18}$ (iii) $\frac{11}{12}$

5. (i) $\frac{2}{3}$

6. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) $\frac{1}{8}$ બંને

7. (i) $\frac{5}{108}$

8. (i) $\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{1}{52}$ (iv) $\frac{4}{13}$

9. (i) $\frac{1}{221}$ 10. (i) $\frac{7}{22}$

11. (i) $\frac{1}{220}$ (ii) $\frac{3}{44}$ (iii) $\frac{1}{50}$ (iv) $\frac{8}{25}$

12. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{7}{50}$ (iii) $\frac{1}{50}$ (iv) $\frac{8}{25}$

13. (i) $\frac{52}{1140}$ (ii) $\frac{1139}{1140}$

14. (i) $\frac{1}{60}$ (ii) $\frac{59}{60}$

15. (i) $\frac{1}{4}$ 16. (i) $\frac{205}{378}$ 17. (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

18. (i) $\frac{20}{81}$ (ii) $\frac{20}{72}$

19. (i) $\frac{21}{50}$ 20. (i) $\frac{5}{6}$ 21. (i) $\frac{6}{7}$ 22. (i) $\frac{2}{5}$

23. (i) 8

24. (i) $\frac{11}{12}$ (ii) $\frac{1}{12}$ (iii) $\frac{2}{3}$

25. (i) $\frac{11}{60}$ (ii) $\frac{11}{15}$ (iii) $\frac{11}{20}$ (iv) $\frac{3}{20}$ (iv) $\frac{1}{15}$

26. (i) $P(A)=\frac{6}{11},\ P(B)=\frac{3}{11},\ P(C)=\frac{2}{11},\ (i)=\frac{9}{11},$ (ii) 1

ગાણિતીય અપેક્ષા : જવાબો

4. 27 5. 13 6. 15.75
7. 12 8. 12, 27, 3, 3
9. (i) 2.2 (ii) 6.4 (iii) 1.56 (iv) 2.6 (v) 23
10. (i) 0.2 (ii) 11.8 (iii) 37.4
11. (i) 0.3 (ii) 2.0

12. (i) $\frac{1}{15}$ (ii) $\frac{10}{15}$

13. (i) $\frac{8}{10}$ 14. $\frac{125}{35} = (3.57)$ 15. 30

16. $\frac{38}{190}$ 17. 6 18. -900

એકમ 7

સંભાવના વિતરણ

7.1 અર્થ :

સંભાવનાના અભ્યાસમાં આપણે જોયું કે યાદચ્છિક પ્રયોગની શક્ય પરિણામી ઘટનાઓ કેટલીક વખત સંખ્યાત્મક હોય છે. જ્યારે કેટલીક વખત ગુણાત્મક હોય છે. જેમકે પરિક્ષામાં વિદ્યાર્થી ક્યાં તો પાસ થાય ક્યાં તો નાપાસ થાય એવા પરિણામ મળે; પરંતુ કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યાની તપાસ કરીએ તો પરિણામી ઘટનાઓ 0, 1, 2 કે 3... એવી સંખ્યાત્મક મળે.

જો નિદર્શ-અવકાશની પ્રત્યેક ઘટનાને કોઈ એક વાસ્તવિક સંખ્યા સાથે કોઈ નિયમથી સાંકળી દઈએ તો આપણને જેમાં રસ છે તેવી ઘટનાઓની સંભાવનાની ગણતરીનું કાર્ય સરળ બને છે.

નિદર્શ-અવકાશ S પર વ્યાખ્યાયિત આવા વાસ્તવિક સંખ્યા લેતા વિધેયને **યાદચ્છિક ચલ** કહે છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં 3 વિદ્યાર્થીઓની તપાસ કરતાં તેમાં "પાસ થયેલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા" યાદચ્છિક ચલ X લઈએ તો Xની શક્ય કિંમતો 0, 1, 2, 3 થશે. યાદચ્છિક ચલના અન્ય કેટલાંક ઉદાહરણ આપણે જોઈએ.

ધારો કે કોઈ એક ડબ્બામાં 3 વાદળી, 2 સફેદ દડા છે અને તેમાંથી એક વ્યક્તિ બે દડા લે છે. જો "વાદળી રંગના મળતા દડાની સંખ્યા"ને યાદચ્છિક ચલ X લઈએ તો Xની શક્ય કિંમતો 0, 1, 2 થશે. આ ઉદાહરણમાં આપણે એમ ઉમેરીએ કે પ્રત્યેક વાદળી દડા માટે રૂ.10 અને પ્રત્યેક સફેદ દડા માટે રૂ.5 મળે છે. તો તે વ્યક્તિને મળતી રકમને યાદચ્છિક ચલ X વડે દર્શાવીએ તો Xની કિંમતો નીચે પ્રમાણે મળશે.

ઘટના	યાદચ્છિક ચલ (X) મળતી રકમ (રૂ.)માં
બંને વાદળી દડા મળે	10 + 10 = 20
બંને સફેદ દડા મળે	5 + 5 = 10
એક વાદળી અને એક સફેદ દડો મળે	10 + 5 = 15

અહીં યાદચ્છિક ચલ Xની કિંમતો 20, 10, 15 મળી શકે છે.

7.2 અસતત અને સતત યાદચ્છિક ચલ

જો કોઈ ચલ આપેલા વિસ્તારમાં ગણી શકાય તેટલી શાન્ત અથવા ગણ્ય અનંત કિંમતો ધારણ કરે તો તે ચલને **અસતત યાદચ્છિક** કહે છે.

દા.ત. કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા, કુટુંબમાં વાહનોની સંખ્યા, વિદ્યાર્થીના ગુણ વગેરે અસતત ચલ થશે.

જો ચલ આપેલા વિસ્તારમાં બધી જ કિંમતો ધારણ કરી શકે તો તેવા ચલને **સતત યાદચ્છિક** ચલ કહે છે.

દા.ત. કોઈ એક રાજયમાં કુટુંબની વાર્ષિક આવક, વસ્તુના ભાવ, માંગ વગેરે સતત ચલ થશે.

7.3 અસતત યાદચ્છિક ચલનું સંભાવના વિતરણ

જો X એક અસતત યાદચ્છિક ચલ હોય અને તે જુદી જુદી કિંમતો $x_1, x_2......x_n$ ધારણ કરતો હોય જેની સંભાવના અનુક્રમે $p(x_1), p(x_2)...p(x_n)$ હોય તો સમૂહ $(x_1, x_2,.......x_n)$ અને $\{p(x_1), p(x_2)....p(x_n)\}$ને યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના વિતરણ કહે છે.

આ સંભાવના વિતરણને કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય.

$X = x$	$P(X=x)$
x_1	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2)$
.	.
.	.
.	.
.	.
x_n	$p(x_n)$
કુલ	1

સંભાવના વિતરણ માટે નીચેની બે જરૂરી શરતો છે :

(1) $p(x_i) \geq 0,\ i = 1,2....n$

(2) $\Sigma p(x_i) = p(x_1) + p(x_2) + ... + p(x_n) = 1$

આપણે આ વ્યાખ્યાને એક ઉદાહરણથી સમજીએ.

ધારો કે એક ડબ્બામાં 3 વાદળી અને 2 સફેદ દડા છે અને તેમાંથી એક વ્યક્તિ બે દડા લે છે. જો "વાદળી દડાની સંખ્યા"ને યાદચ્છિક ચલ x લઈએ તો તેનું સંભાવના વિતરણ સમજીએ.

એક ડબ્બામાં 3 વાદળી અને 2 સફેદ એટલે કે કુલ 5 દડા છે. જેમાંથી બે દડા લેવામાં આવે છે. તે લેવામાં આવેલ દડામાંથી મળતા વાદળી દડાની સંખ્યા યાદચ્છિક ચલ x વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

હવે ડબ્બામાંથી લીધેલાં બે દડામાંથી વાદળી દડાની સંખ્યા 0, 1 કે 2 હોઈ શકે તો સફેદ દડાની સંખ્યા 2, 1 કે 0 જ હોઈ શકે છે.

યાદચ્છિક ચલ (x) વાદળી દડાની સંખ્યા	સફેદ દડાની સંખ્યા	સંભાવના
0	2	$\frac{{}_3C_0 \times {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$
1	1	$\frac{{}_3C_2 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10}$
2	1	$\frac{{}_3C_2 \times {}_2C_0}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$
કુલ		$\frac{10}{10} = 1$

તેથી યાદચ્છિક ચલ xનું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે મળશે.

વાદળી દંડાની સંખ્યા (x)	0	1	2
સંભાવના $p(x)$.	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

યાદચ્છિક ચલના ઘણા પ્રકારના સંભાવના વિતરણો છે. જેવાં કે દ્વિપદી, પોયસન, અતિગુણોત્તર, ગુણોત્તર, ઋણ દ્વિપદી વગેરે. આપણો અભ્યાસ દ્વિપદી અને પોયસન સંભાવના વિતરણ પૂરતો સીમીત રાખીશું.

7.4 દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ (Binomial Probability Distribution)

ઘણા યાદચ્છિક પ્રયોગના બે જ પરિણામો શક્ય હોય. ઉપરાંત આ પરિણામો પરસ્પર નિવારક હોય છે.

દા.ત. (1) કારખાનામાં ઉત્પાદિત એકમની તપાસ કરવામાં આવે તો તે ક્યાં તો ખામીવાળું હશે અથવા ખામી વગરનું હશે. એટલે કે બે જ પરિણામ શક્ય છે.

(2) યુદ્ધ વખતે વપરાતા એન્ટી એરક્રાફ્ટ મિસાઈલ ક્યાં તો એરક્રાફ્ટને અથડાશે અથવા નહીં અથડાય. એટલે કે બે જ પરિણામ શક્ય છે.

(3) વિદ્યાર્થીઓએ આપેલ પરિક્ષામાં ક્યાં તો તે પાસ થશે અથવા નાપાસ થશે એટલે કે બે જ પરિણામ શક્ય છે.

આવા યાદચ્છિક પ્રયોગને આપણે દ્વિવિધ વિકલ્પના પ્રયોગ કહીશું અને તેમાં મળતા પરિણામોને સફળતા અથવા નિષ્ફળતા કહીશું. અહીં સફળતા અથવા નિષ્ફળતા પ્રયોગના હેતુ પરથી નક્કી કરવામાં આવે છે.

અઢારમી સદીની શરૂઆતમાં સ્વીસ ગણિતશાસ્ત્રી જેમ્સ બર્નોલીએ આ વિતરણની સૌપ્રથમ રજૂઆત કરી હતી.

બર્નોલી પ્રયત્નો : ધારો કે એક દ્વિવિધ વિકલ્પવાળા યાદચ્છિક પ્રયોગનાં બે શક્ય પરિણામો સફળતા અને નિષ્ફળતા છે અને જો આ પ્રયોગનું સમાન પરિસ્થિતિ હેઠળ પુનરાવર્તન કરવામાં આવે અને દરેક પ્રયત્ને સફળતાની સંભાવના અચળ રહેતી હોય તો આવા પ્રયોગોને બર્નોલી પ્રયત્નો કહેવામાં આવે છે.

7.5 બર્નોલી પ્રયત્નોના ગુણધર્મો :

(1) દરેક પ્રયત્નમાં ફક્ત બે જ શક્ય પરિણામો (i) સફળતા (ii) નિષ્ફળતા મળી શકે છે.

(2) દરેક પ્રયત્ને મળતી સફળતાની સંભાવના અચળ હોય છે.

(3) દરેક પ્રયત્ન એકબીજાથી સ્વતંત્ર હોય છે. એટલે કે કોઈપણ પ્રયત્ને મળતી સફળતા કે નિષ્ફળતા તેના અગાઉના પ્રયત્ને મળેલ સફળતા કે નિષ્ફળતા પર આધારિત નથી.

(4) સફળતા અને નિષ્ફળતા બંને પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે એટલે સફળતાની સંભાવના અને નિષ્ફળતાની સંભાવનાનો સરવાળો 1 થશે

7.6 દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ

જો કોઈ એક યાદચ્છિક પ્રયોગમાં ફક્ત બે જ પરિણામો સફળતા અને નિષ્ફળતા મળી શકતા હોય અને દરેક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના p અને નિષ્ફળતાની સંભાવના q અચળ રહેતી હોય અને જો આ પ્રયોગનું સ્વતંત્ર રીતે n વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે તો તેમાંથી x પ્રયત્નોમાં સફળતા મળે તેની સંભાવના $p(x) = {}^{n}C_x p^x q^{n-x}$ થાય.

અહીં x એ સાન્ત ગણ $\{0, 1, 2 .... n\}$ માંથી કોઈપણ એક કિંમત ધારણ કરી શકે છે.

સંભાવનાના આ વિતરણને દ્વિપદી વિતરણ કહે છે. n અને p ને દ્વિપદી વિતરણના પ્રાચલ કહેવામાં આવે છે તેથી દ્વિપદી વિતરણને સંજ્ઞામાં $b(n, p)$ વડે દર્શાવી શકાય છે.

દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો

(1) દ્વિપદી વિતરણ એ અસતત ચલ માટેનું વિતરણ છે.

(2) n અને p તેનાં પ્રાચલો છે.

(3) આ વિતરણનો મધ્યક np છે જે સફળતાની સરેરાશ સંખ્યા દર્શાવે છે.
(4) આ વિતરણનું વિચરણ npq છે.
(5) દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક એ વિચરણ કરતા મોટો હોય છે એટલે કે $np > npq$

(6) nની કોઈપણ કિંમત માટે જો $p < \frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણની વિષમતા ધન થાય છે.

(7) nની કોઈપણ કિંમત માટે જો $p > \frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણની વિષમતા ઋણ થાય છે.

(8) nની કોઈપણ કિંમત માટે જો $p = \frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણની વિષમતા શૂન્ય થાય છે એટલે કે વિતરણ સંમિત થાય છે.

નોંધ :

(1) દ્વિપદી વિતરણમાં જ્યારે કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા (n) ખૂબ મોટી હોય અને p અને q ની કિંમતો નાની ન હોય તો દ્વિપદી વિતરણનું સ્વરૂપ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે.
(2) જો બર્નોલી પ્રયત્નોવાળા પ્રયોગને N વખતે પુનરાવર્તિત કરીએ તો N પુનરાવર્તનોમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાની અપેક્ષિત આવૃત્તિ = $N.p(x)$ થશે.

ઉદાહરણ-1 : નિશાન તાકવાની એક રમતમાં રોનિશ સફળ જાય તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ છે. જો તેને નિશાન તાકવા માટે 5 પ્રયત્નો આપવામાં આવે તો તેમાંથી 2 પ્રયત્નોમાં તે નિશાન તાકવામાં સફળ થાય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં દરેક પ્રયત્નમાં નિશાન તાકવાની સંભાવના $p = \frac{4}{5} = 0.8$ આપેલ છે.

$\therefore q = 1 - p = 1 - 0.8 = 0.2$ અને $n = 5$ છે
હવે, 2 પ્રયત્નોમાં સફળતા મળે એટલે $x = 2$ થાય.
$P(x) = {}^n c_x p^x q^{n-x}$ માં n,p,q અને xની કિંમત મૂકતા,
$P(2) = {}^5 C_2 \ (0.8)^2 \ (0.2)^{5-2}$
$= 10 \times 0.64 \times 0.008$
$= 0.0512$
આમ, 5 પ્રયત્નોમાંથી 2માં સફળતા મળે તેની સંભાવના 0.0512 થાય.

ઉદાહરણ-2 : એક કૉલેજમાં ભણતા વિદ્યાર્થીઓમાં 20% વિદ્યાર્થીઓને ચશ્માં છે. તે કૉલેજમાંથી લીધેલ 4 વિદ્યાર્થીઓમાંથી એક વિદ્યાર્થીને ચશ્માં હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં કૉલેજમાં ભણતા વિદ્યાર્થીને ચશ્માં હોય તેની સંભાવના $(p) = 0.20$ થશે.

$\therefore q = 1 - p = 1 - 0.20 = 0.80$
$n = 4$ અને ચશ્માં હોય તેવા વિદ્યાર્થીની સંખ્યાને X લઈએ.
એક વિદ્યાર્થીને ચશ્માં હોય એટલે કે x = 1 થાય.
$\therefore \ P(1) = {}^4C_1(0.20)^1 \ (0.80)^{4-1}$
$= 4 \times 0.20 \times 0.512$
$= 0.4096$

ઉદાહરણ-3 : એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત એકમોમાં 98% એકમો ખામીરહિત હોય છે. આ

ઉત્પાદિત થયેલ એકમોમાંથી યાદચ્છિક રીતે 6 એકમો પસંદ કરવામાં આવે છે, તેમાંથી બધા જ એકમો ખામીરહિત મળે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : પસંદ કરેલ એકમ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને સફળતા ગણીએ તો સફળતાની સંભાવના $p = 0.02$ થશે. અહીં $n = 6$ અને $q = 1 - p = 0.98$ થશે.

બધા જ એકમો ખામીરહિત મળે

એટલે એક પણ એકમ ખામીવાળો નથી તેથી $x = 0$ થાય.

$$\text{P}(0) = {}^6C_0 (0.02)^0 (0.98)^{6-0}$$
$$= 1 \times 1 \times 0.8858$$
$$= 0.8858$$

ઉદાહરણ-4 : એક સ્ટોરમાં આવતા ગ્રાહકો પૈકી 10 ટકા ગ્રાહકો ટી.વી.ની ખરીદી કરે છે. જો કોઈ એક દિવસે તે સ્ટોરમાં 10 ગ્રાહકો આવ્યા હોય તો તે દિવસે

(i) એક પણ ટીવીનું વેચાણ ન થાય.

(ii) ઓછામાં ઓછા 3 ટીવીનું વેચાણ થાય.

(iii) 4થી વધારે ટીવીનું વેચાણ ન થાય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : અહીં ગ્રાહક ટીવી ખરીદશે તેની સંભાવના $(p) = 0.10$ છે. $\therefore q = 1 - p = 1 - 0.10 = 0.90$ થશે. $n = 10$ અને ટીવી ખરીદે તેવા ગ્રાહકની સંખ્યાને X લઈએ.

(i) **એક પણ ટીવીનું વેચાણ ન થાય.**

એટલે કે $x = 0$ થશે.

$$P(0) = {}^{10}C_0 (0.10)^0 (0.90)^{10}$$
$$= 1 \times 1 \times 0.3487$$
$$= 0.3487$$

(ii) **ઓછામાં ઓછા 3 ટીવીનું વેચાણ થાય.**

એટલે કે $x \geq 3$ થશે.

$$\therefore \text{P}(x \geq 3) = \text{P}(3) + \text{P}(4) + ... + \text{P}(10)$$
$$= 1 - [\text{P}(0) + \text{P}(1) + \text{P}(2)]$$

$$\text{P}(0) = {}^{10}C_0 (0.10)^0 (0.90)^{10}$$
$$= 1 \times 1 \times 0.3487$$
$$= 0.3487$$

$$P(1) = {}^{10}C_1 (0.10)^1 (0.90)^9$$
$$= 10 \times 0.10 \times 0.3874$$
$$= 0.3874$$

$$P(2) = {}^{10}C_2 (0.10)^2 (0.90)^8$$
$$= 45 \times 0.01 \times 0.4305$$
$$= 0.1937$$

$$\therefore P(x \geq 3) = 1 - [0.3487 + 0.3874 + 0.1937]$$
$$= 1 - 0.9278$$
$$= 0.0702$$

(iii) **4થી વધારે ટીવીનું વેચાણ ન થાય**

એટલે કે $x \leq 4$

$$P(x \leq 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$P(0), P(1), P(2)$ની કિંમતો આગળ મેળવેલ છે. તેથી $P(3)$ અને $P(4)$ની કિંમતો મેળવીશું.

$P(3)={}^{10}C_3(0.10)^3(0.90)^7$

$=120\times 0.001\times 0.4783$

$=0.05740$

$P(4)={}^{10}C_4(0.10)^4(0.90)^6$

$=210\times 0.0001\times 0.5314$

$=0.01116$

હવે, $P(x\le 4)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)$

$=0.3487+0.3874+0.1937+0.05740+0.01116$

$=0.9984$

ઉદાહરણ-5 : છોકરા અને છોકરીની સંભાવના સરખી ગણતાં પ્રત્યેક કુટુંબમાં 4 બાળકો હોય તેવા 400 કુટુંબોમાં

(i) 2 છોકરા, (ii) 4 છોકરીઓ, (iii)1 અથવા 2 છોકરાઓ હોય તેવા કુટુંબોની સંખ્યા શોધો.

જવાબ : છોકરા અને છોકરીની સંભાવના સરખી હોવાથી છોકરા અને છોકરીની સંભાવના 0.5 અને 0.5 થશે.

જો છોકરાઓની સંખ્યાને X લઈએ તો છોકરાની સંભાવના $(p)=0.5$ થશે.

અહીં $n=4$ અને $N=400$ થશે.

(i) **2 છોકરા**

એટલે કે $x = 2$ થાય.

$P(2)={}^4C_2(0.5)^2\times(0.5)^2$

$=6\times 0.25\times 0.25$

$=0.375$

$\therefore$ 2 છોકરાઓ હોય તે કુટુંબોની સંખ્યા = $N\,P(2)=400\times 0.375=150$ થશે.

(ii) **4 છોકરીઓ**

એટલે કે 0 છોકરાઓ થશે. $\therefore x=0$

$P(0)={}^4C_0(0.5)^0(0.5)^4$

$=1\times 1\times 0.0625$

$=0.0625$

4 છોકરીઓ હોય તેવા કુટુંબોની સંખ્યા = $NP(0)$

$=400\times 0.0625$

$=25$

(iii) **1 અથવા 2 છોકરા**

એટલે કે $x=1$ અથવા $x=2$ થશે.

$P(1)={}^4C_1(0.5)^1(0.5)^2$

$=4\times 0.5\times 0.125$

$=0.25$

$P(2)={}^4C_2(0.5)^2(0.5)^2$

$=6\times 0.25\times 0.25$

$=0.375$

તેથી P(x=1 અથવા x=2) = $P(1)+P(2)=0.25+0.375$

$=0.625$

$\therefore$ 1 અથવા 2 છોકરાઓ હોય તેવા કુટુંબોની સંખ્યા = 400×0.625

$=250$

ઉદાહરણ-6 : એક સમતોલ પાસાને 6 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. દરેક પ્રયત્ને 1 અથવા 6 મળે તેને સફળતા ગણીએ તો સફળતાની સંખ્યાનું સંભાવના-વિતરણ લખો.

જવાબ : એક સમતોલ પાસામાં 1 અથવા 6 મળે તેની સંભાવના $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ થશે.

$\therefore q=1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

હવે કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા 6 છે. $\therefore n=6$ થશે.

6 પાસાઓ ઉછાળતા મળતી સફળતાની સંખ્યાને X લઈએ.

હવે, $P(x)={}^nC_x p^x q^{n-x}$

$$P(x)={}^6C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}, x=0,1....6 \text{ મળે.}$$

હવે આપણે ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી દરેક x માટે તેની સંભાવના મેળવીશું.

x	$P(x)$
0	${}_6C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}$
1	${}_6C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{192}{729}$
2	${}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{240}{729}$
3	${}_6C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{160}{729}$
4	${}_6C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{60}{729}$
5	${}_6C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{12}{729}$
6	${}_6C_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{729}$
કુલ	$\frac{729}{729}=1$

ઉદાહરણ-7 : એક દ્વિપદી વિતરણ માટે મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 3 અને $\frac{9}{4}$ છે, તો આ વિતરણનાં પ્રાચલો શોધો.

જવાબ : અહીં વિચરણ = $\frac{9}{4}$ અને મધ્યક = 3 છે.

$\therefore npq=\frac{9}{4}$ અને $np=3$ છે.

$$\therefore \frac{npq}{np}=\frac{\frac{9}{4}}{3}$$

$\therefore q=\frac{3}{4}$ તથા $p=1-q=\frac{1}{4}$ થશે.

હવે $np=3$ છે.

$\therefore n\left(\frac{1}{4}\right)=3$

$\therefore n=12$ થશે. તેથી વિતરણના પ્રાચલો $n=12$ અને $p=\frac{1}{4}$ છે.

ઉદાહરણ-8 : એક દ્વિપદી વિતરણ માટે $n=5$ અને $2P(1)=P(3)$ હોય તો આ વિતરણમાં સફળતાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : $n=5$ અને $2P(1)=P(3)$ આપેલ છે.

$\therefore 2\left[{}^5C_1 p^1 q^4\right]=\left[{}^5C_3 p^3 q^2\right]$

$\therefore 2\left[5pq^4\right]=10p^3q^2$

$\therefore q^2=p^2$

$\therefore q=p$

$\therefore 1-p=p$

$\therefore 2p=1$

$\therefore p=\frac{1}{2}$ થાય.

તેથી સફળતાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે.

સ્વાધ્યાય

1. યાદચ્છિક ચલની વ્યાખ્યા આપો.
2. અસતત અને સતત યાદચ્છિક ચલનો અર્થ સમજાવો.
3. અસતત યાદચ્છિક ચલનું સંભાવના વિતરણ એટલે શું ?
4. દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના સૂત્ર જણાવો અને તેના પ્રાચલો જણાવો.
5. દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો જણાવો.
6. એક ડબ્બાના 6 બલ્બમાંથી 2 ખામીવાળા છે. જો તે ડબ્બામાંથી યાદચ્છિક રીતે 2 બલ્બ લેવામાં આવે તો ખામીવાળા બલ્બનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.
7. એક થેલીમાં 5 લાલ અને 4 સફેદ દડા છે. જો થેલીમાંથી યાદચ્છિક રીતે 3 દડા લેવામાં આવે તો લાલ દડાની સંખ્યાનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.
8. એક ડબ્બામાં 6 ટિકિટો છે. તેના ઉપર 1, 1, 2, 2, 3, 3 એમ સંખ્યાઓ લખેલી છે. તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે 2 ટિકિટ લેવામાં આવે છે. જો ટિકિટ ઉપર મળતી સંખ્યાઓના સરવાળાને યાદચ્છિક ચલ X વડે દર્શાવવામાં આવે તો Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.
9. બે પાસાઓને એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. બે પાસાઓ પર મળતા અંકોમાંથી મહત્તમ અંકને X વડે દર્શાવીએ તો Xનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.
10. યુદ્ધ દરમિયાન હવાઈ સફરમાં સરેરાશ 10માંથી એક વિમાન તોડી પડાય છે, તો 5 વિમાનના કાફલામાંથી 4 વિમાન સલામત રીતે પાછા આવે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.
11. એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલા એકમોમાં 2% એકમો ખામીવાળા હોય છે. આ ઉત્પાદિત થયેલ એકમોમાંથી યાદચ્છિક રીતે 6 એકમો પસંદ કરવામાં આવે છે. તેમાંથી (1) એક પણ એકમ ખામીવાળો ન મળે (2) 2 એકમો ખામીવાળા મળે તેની સંભાવના કેટલી થશે ?

12. એક સમતોલ પાસાને 7 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. દરેક પ્રયત્ને 2 કે તેથી નાની સંખ્યા મળે તેને સફળતા ગણીએ તો (1) 4 સફળતા મળે (2) વધુમાં વધુ 6 સફળતા મળે તેની સંભાવના શોધો.
13. એક બોક્સમાં 100 બોલપેન છે જેમાંથી 20 ખામીવાળી છે. જો બોક્સમાંથી 10 બોલપેન યાદચ્છિક રીતે લેવામાં આવે તો (1) બધી જ બોલપેન ખામીવાળી (2) બધી જ ખામી વગરની હોય તેની સંભાવના શોધો.
14. એક દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણ 6 અને 2 છે, તો આ દ્વિપદી વિતરણના પ્રાચલો શોધો.
15. એક દ્વિપદી વિતરણમાં જો $n=6$ અને $9p(x=4)=p(x=2)$ હોય તો વિતરણનું મધ્યક અને વિચરણ શોધો.
16. છ સિક્કા એકસાથે ઉછાળવામાં આવે તો (1) પાંચ છાપ (2) ઓછામાં ઓછી 2 છાપ મળે તેની સંભાવના શોધો.
17. કોઈ એક વિસ્તારમાં ચોમાસામાં 30માંથી 10 દિવસ વરસાદ પડે છે. તો એક અઠવાડીયામાં ઓછામાં ઓછા 3 દિવસ વરસાદ પડે તેની સંભાવના શોધો.
18. એક પરિક્ષામાં બહુ વિકલ્પ પ્રશ્નો પૂછવામાં આવે છે. દરેક પ્રશ્નોના ચાર વિકલ્પો આપવામાં આવે છે અને તેમાંથી એક જ વિકલ્પ સાચો છે. જો પરિક્ષામાં 10 પ્રશ્નો પૂછવામાં આવે તો (1) દરેક પ્રશ્નના જવાબ સાચા પડે (2) વધુમાં વધુ 3 પ્રશ્નોના જવાબ સાચા પડે તેની સંભાવના શોધો.
19. એક દ્વિપદી વિતરણમાં જો $n=5$ અને $P(3):P(4)=8:3$ હોય તો p ની કિંમત શોધો.
20. એક દ્વિપદી વિતરણનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય $p(x)={}^8C_x p^x q^{n-x}$ અને મધ્યક 2 આપેલ હોય તો $p(x=6)$ શોધો.

પોયસન વિતરણ (Poisson distribution)

ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી સાયમન ડી. પોયસને ઈ.સ.1837માં આ વિતરણ શોધેલું.

દ્વિપદી વિતરણમાં જ્યારે n ની કિંમત ખૂબ મોટી હોય $(n\to\infty)$ અને p ની કિંમત ખૂબ નાની હોય $(p\to 0)$ અને np ની કિંમત ચોક્કસ સંખ્યા હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણનું લક્ષ પોયસન વિતરણ બને છે.

વ્યાખ્યા : જે ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય $P(x)=\dfrac{e^{-m}m^x}{x!}, x=0,1,2.....: m>0$ હોય તે યાદચ્છિક ચલ xને પોયસન ચલ કહે છે અને તેના વિતરણને પોયસન વિતરણ કહે છે.

ઉપયોગિતા : આ વિતરણ વ્યવહારમાં ઘણું ઉપયોગી છે, કારણ કે ઘણીબધી વ્યવહારુ પરિસ્થિતિઓમાં યાદચ્છિક ચલ પોયસન વિતરણ ધરાવતો હોય છે. નીચે આવા કેટલાક યાદચ્છિક ચલ જે પોયસન વિતરણ ધરાવે છે તે જાણીએ :

– કોઈ એક વિસ્તારમાં અમુક સમયના ગાળામાં થતાં અકસ્માતોની સંખ્યા.
– ઓફિસમાં અમુક સમયના ગાળામાં આવતા ટેલિફોનની સંખ્યા.
– છાપેલા પાના પર ભૂલોની સંખ્યા
– અમુક વિસ્તારમાં અમુક સમયના ગાળામાં કોઈ ચોક્કસ રોગથી થતા મૃત્યુની સંખ્યા વગેરે.

ગુણધર્મો

(1) પોયસન વિતરણ અસતત ચલનું વિતરણ છે.
(2) m એ પ્રાચલ છે.
(3) આ વિતરણનો મધ્યક અને વિચરણ m છે.
(4) આ વિતરણ ધન વિષમતાવાળું વિતરણ છે.
(5) બે નિરપેક્ષ પોયસન ચલોના સરવાળાનું વિતરણ પોયસન વિતરણ હોય છે.

પોયસન વિતરણના દાખલા માટે e^{-m} ની કિંમત આ પ્રકરણના સ્વાધ્યાય પછી આપેલ કોષ્ટકમાંથી શોધી અને ગણતરી કરીશું.

ઉદાહરણ-1 : એક કંપનીના ઉત્પાદનમાં સરેરાશ 3% વસ્તુઓ ખામીવાળી હોય છે. તો 100 વસ્તુની એક પેટીમાં 3 વસ્તુઓ ખામીવાળી હોવાની સંભાવના શોધો.

જવાબ : પેટીમાં ખામીવાળી વસ્તુઓની સંખ્યાને X વડે દર્શાવીએ.

$m =$ પેટીમાં ખામીવાળી વસ્તુઓની સરેરાશ

$$= np$$

$$= 100 \times \frac{3}{100}$$

$$\therefore m = 3$$

3 વસ્તુઓ ખામીવાળી હોવાની સંભાવના હોય એટલે કે $x = 3$ થાય.

$$P(3) = \frac{e^{-3} 3^3}{3!}$$

$$= \frac{0.0498 \times 27}{6}$$

$$= 0.2241$$

ઉદાહરણ-2 : એક મોટા કારખાનામાં, કોઈ એક પાળીમાં સરેરાશ 2 કારીગરો ગેરહાજર હોય છે. તો કોઈ ચોક્કસ પાળીમાં (1) ત્રણ કારીગરો ગેરહાજર હોય (2) ચારથી વધુ ગેરહાજર હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : ગેરહાજર કારીગરોની સંખ્યાને X વડે દર્શાવીએ તો કોઈ એક પાળીમાં સરેરાશ ગેરહાજરી લેતાં $m = 2$

(1) ત્રણ કારીગર ગેરહાજર હોય એટલે કે $x = 3$

$$P(x = 3) = \frac{e^{-2} 2^3}{3!}$$

$$= \frac{0.1353 \times 8}{6}$$

$$= 0.1804$$

(2) ચાર કે તેથી વધુ ગેરહાજર હોય એટલે કે $x = 4, 5, 6....$

$$P(x \geq 4) = P(4) + P(5) + ...$$

$$= 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-2} 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} 2^2}{2!} + \frac{e^{-2} 2^3}{3!}\right]$$

$$= 1 - e^{-2}\left[\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{6}\right]$$

$$= 1 - 0.1353[6.5]$$

$$= 0.1206$$

ઉદાહરણ-3 : એક કોર્પોરેટ કંપનીના ઈન્ટ્રા-મેલ સરવર પર 1 થી 3 વાગ્યા દરમિયાન દર મિનિટે સરેરાશ 3.5 મેલ આવે છે, તો અમુક ચોક્કસ મિનિટના ગાળામાં (1) એક મેલ આવે (2) એક પણ મેલ ન આવે (3) વધુમાં વધુ 3 મેલ આવે તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : દર મિનિટે આવતા મેલની સંખ્યા X વડે દર્શાવતા Xનું વિતરણ પોયસન વિતરણ બને.

અહીં, દર મિનિટે સરેરાશ 3.5 મેલ આવે છે.

$\therefore m = 3.5$

(1) **એક મેલ આવે એટલે કે $x = 1$**

$$\therefore P(1) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^1}{1!}$$

$$= \frac{0.3020 \times 3.5}{1}$$

$= 0.1057$

(2) **વધુમાં વધુ 3 મેલ આવે એટલે કે $x = 0, 1, 2, 3$ થશે.**

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$$

$$= \frac{e^{-3.5}(3.5)^0}{0!} + \frac{e^{-3.5}(3.5)^1}{1!} + \frac{e^{-3.5}(3.5)^2}{2!} + \frac{e^{-3.5}(3.5)^3}{3!}$$

$$= e^{-3.5}\left[\frac{1}{1} + \frac{3.5}{1} + \frac{12.25}{2} + \frac{42.875}{6}\right]$$

$$= 0.03020 \times [1 + 3.5 + 6.125 + 7.15]$$

$= 0.5368$

ઉદાહરણ-4 : ઈલેક્ટ્રિક બલ્બ બનાવતી કંપનીના ઉત્પાદનમાં 0.2% ખામીવાળા હોય છે. તો 200 બલ્બની એક પેટીમાં બધા જ ખામી વગરના હોય તેની સંભાવના શોધો.

જવાબ : પેટીમાંથી મળતા ખામીવાળા બલ્બની સંખ્યાને X વડે દર્શાવતા, Xનું વિતરણ પોયસન વિતરણ બને.

ખામીવાળા બલ્બની સરેરાશ સંખ્યા $(m) = np$

$$= 200 \times \frac{0.2}{100}$$

$\therefore m = 0.4$

બધા જ ખામી વગરના હોય એટલે કે $x = 0$ થશે

$$P(0) = \frac{e^{-0.4}(0.4)^0}{0!}$$

$= 0.01832$

ઉદાહરણ-5 : પોયસન ચલ X માટે $P(x=2) = P(x=3)$ હોય તો તેનો મધ્યક અને પ્ર.વિ. શોધો.

જવાબ :

અહીં $P(x=2) = P(x=3)$

$$\therefore \frac{e^{-m}m^2}{2!} = \frac{e^{-m}m^3}{3!}$$

$$\therefore \frac{m^2}{2} = \frac{m^3}{6}$$

$\therefore m = 3$

હવે મધ્યક = m

$\therefore$ મધ્યક = 3

અને પ્ર.વિ. = $\sqrt{m}$

$= \sqrt{3}$

$= 1.7321$

ઉદાહરણ-6 : પોયસન ચલ X એ ધન કિંમતો ધારણ કરે તેની સંભાવના $(1 - e^{-2.5})$

હોય તો $P(-1.5 < x < 1.5)$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ : $P(x > 0) = 1 - e^{-2.5}$

$\therefore 1 - P(0) = 1 - e^{-2.5}$

$\therefore P(0) = e^{-2.5}$

$\therefore \dfrac{e^{-m} m^0}{0!} = e^{-2.5}$

$\therefore m = 2.5$

હવે, $P(-1.5 < x < 1.5)$

$= P(0) + P(1)$ [$\because$ પોયસન ચલ $x = 0, 1, 2, \ldots$ કિંમતો જ ધારણ કરે છે.)

$= \dfrac{e^{-2.5}(2.5)^0}{0!} + \dfrac{e^{-2.5}(2.5)^1}{1!}$

$= e^{-2.5}\left[\dfrac{1}{1} + \dfrac{2.5}{1}\right]$

$= (0.08208)(3.5)$

$= 0.2873$

ઉદાહરણ-7 : પોયસન ચલ X માટે

$P(x = 2) = 9P(x = 4) + 90\ P(x = 6)$ હોય તો મધ્યક અને વિચરણ શોધો :

જવાબ : $P(x = 2) = 9P(x = 4) + 90P(x = 6)$

$\therefore \dfrac{e^{-m} m^2}{2!} = 9\left[\dfrac{e^{-m} m^4}{4!}\right] + 90\left[\dfrac{e^{-m} m^6}{6!}\right]$

$\therefore \dfrac{e^{-m} m^2}{2} = 9\left[\dfrac{e^{-m} m^4}{24}\right] + 90\left[\dfrac{e^{-m} m^6}{720}\right]$

$\therefore \dfrac{e^{-m} m^2}{2} = \dfrac{3e^{-m} m^4}{8} + \dfrac{e^{-m} m^6}{8}$

$\therefore \dfrac{e^{-m} m^2}{2} = \dfrac{e^{-m} m^2}{2}\left[\dfrac{3m^2 + m^4}{4}\right]$

$\therefore 1 = \dfrac{3m^2 + m^4}{4}$

$\therefore 4 = 3m^2 + m^4$

$\therefore m^4 + 3m^2 - 4 = 0$

$\therefore (m^4 + 4)(m^4 - 1) = 0$

$\therefore m^4 = -4$ અથવા $m^4 = 1$

$\therefore m = 1$ [$\because m$ ની ઋણ કિંમતો શક્ય નથી.]

હવે મધ્યક $= m = 1$

અને વિચરણ $= m = 1$

સ્વાધ્યાય

1. કઈ શરતો હેઠળ દ્વિપદી વિતરણ પોયસન વિતરણને અનુસરે છે ?
2. પોયસન વિતરણનું સંભાવના સૂત્ર લખો.
3. પોયસન વિતરણને અનુસરતી હોય તેવી પાંચ ઘટનાઓ જણાવો.
4. પોયસન વિતરણના ગુણધર્મો જણાવો.
5. પોયસન વિતરણનો મધ્યક અને વિચરણ જણાવો.
6. સેફ્ટી પીનનો ઉત્પાદક તેના ઉત્પાદનમાં 10% સેફ્ટીપીન ખામીવાળી છે એમ જણાય છે. દરેક બોક્સમાં તે 100 સેફ્ટીપીન મૂકે છે અને ખાતરી આપે છે કે કોઈપણ બોક્સમાં 5 કરતાં વધારે સેફ્ટીપીન ખામીવાળી હશે નહીં, તો કોઈ પણ એક બોક્સ માટે તેણે આપેલી ખાતરી સાચી હોય તેની સંભાવના શોધો.
7. એક ટ્રાવેલ એજન્ટ પાસે કેટલીક ટેક્સીઓ છે. તે જાણે છે કે રોજની સરેરાશ 2 ટેક્સીઓની માગ છે. તો કોઈપણ એક દિવસે 3 કે તેથી વધુ ટેક્સીઓ ઉપયોગમાં હોય તેની સંભાવના શોધો.
8. એક છપાવેલ પુસ્તકમાં પાનાદીઠ સરેરાશ 0.5 ભૂલ માલૂમ પડે છે. 200 પાનાંના તે પુસ્તકમાં કેટલાં પાનામાં 2થી વધુ ભૂલો હશે તે પોયસન વિતરણનો ઉપયોગ કરીને શોધો.
9. એક કંપનીના ટેલિફોન સ્વિચ બોર્ડ ઉપર 1 થી 2 વાગ્યાના લંચ-બ્રેક દરમિયાન દર મિનિટે સરેરાશ 4 કોલ આવે છે તો અમુક ચોક્કસ મિનિટના ગાળામાં (1) 3 કોલ અને (2) વધુમાં વધુ 2 કોલ આવે તેની સંભાવના શોધો.
10. પેન્સિલ બનાવતી એક ફેક્ટરીમાં કોઈ પણ પેન્સિલ ખામીવાળી હોવાની સંભાવના $\frac{1}{200}$ છે. પેકેટમાં 50ના પેન્સિલ પેક કરવામાં આવે છે, તો 1000 પેકેટના એક જથ્થામાં (1) એક પણ પેન્સિલ ખામીવાળી ન હોય (2) બે પેન્સિલ ખામીવાળી હોય તેવા પેકેટની લગભગ સંખ્યા શોધો.
11. એક પોયસન વિતરણનો મધ્યક 3 છે. તો તે વિતરણમાં 2 વખત સફળતા મળે તેની સંભાવના શોધો.
12. એક પોયસન વિતરણમાં પ્રમાણિત વિચલન 1.41 છે. તેનો મધ્યક અને $P(1)$ શોધો.
13. x એક એવો પોયસન ચલ છે, જેમાં $P(x=1)=P(x=2)$ છે. તો $P(x=3)$ મેળવો.
14. જો એક પોયસન ચલ x માટે $3P(x=2)=2P(x=3)$ હોય તો મધ્યક શોધો.
15. જો x એક પોયસન ચલ હોય અને $P(x=0)=0.05$ હોય તો $P(x \geq 2)$ ની કિંમત મેળવો.

Values 0f e^{-m}

$(0 < m < 1)$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	.9900	.9802	.9704	.9608	.9512	.9418	.9324	.9231	.9139
0.1	.9048	.8958	.8869	.8781	.8694	.8607	.8521	.8437	.8553	.8270
0.2	.8187	.8106	.8025	.7945	.7866	.7788	.7711	.7634	.7558	.7483
0.3	.7408	.7334	.7261	.7189	.7118	.7047	.6977	.6907	.6839	.6771
0.4	.6703	.6636	.6570	.6505	.6440	.6376	.6313	.6250	.6188	.6126
0.5	.6065	.6005	.5945	.5886	.5827	.5770	.5712	.5655	.5599	.5543
0.6	.5488	.5434	.5379	.5326	.5273	.5226	.5169	.5117	.5066	.5016
0.7	.4966	.4916	.4868	.4819	.4771	.4724	.4777	.4630	.4584	.4538
0.8	.4493	.4449	.4404	.4360	.4317	.4274	.4232	.4190	.4148	.4107
0.9	.4066	.4025	.3985	.3946	.3906	.3867	.3829	.3791	.3753	.3716

$(m = 1, 2, 3, \ldots, 10)$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e^{-m}	.36788	.13534	.04979	.01832	.006738	.002479	.000912	.000335	.000123	.000045

Note : $e^{-235} = e^{-2} \times e^{-0.35}$
$= 0.13534 \times 0.7047$
$= 0.09537$

સંભાવના વિતરણ
સ્વાધ્યાય

બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો

1. દ્વિપદી વિતરણ સંમિત વિતરણ ક્યારે થાય ?
   (a) $p > q$ (b) $p < q$ (c) $p = q$ (d) $p = 0$
2. દ્વિપદી વિતરણમાં
   (a) મધ્યક = વિચરણ (b) મધ્યક = પ્ર.વિ. (c) મધ્યક > વિચરણ (d) મધ્યક < વિચરણ
3. દ્વિપદી વિતરણમાં પ્રયોગના સફળતાની સંભાવના પ્રયોગના નિષ્ફળતાની સંભાવના કરતાં બમણી છે, તો હવે પાંચ વખત પ્રયોગ કરવામાં આવે તો એક પણ સફળતા ન મળે તેની સંભાવના મેળવો
   (a) $2/3$ (b) $1/3$ (c) $1/243$ (d) $32/243$
4. જો દ્વિપદી વિતરણમાં મધ્યક અને વિચરણનો સરવાળો 5 અને તફાવત 1 હોય તો તેના પ્રાચલો મેળવો.
   (a) $n = 9, p = 1/3$ (b) $n = 9, p = 2/3$ (c) $n = 25, p = 4/5$ (d) $n = 25, p = 1/5$
5. પોયસન વિતરણમાં
   (a) મધ્યક = વિચરણ (b) મધ્યક = પ્રા.વિ. (c) મધ્યક > વિચરણ (d) મધ્યક < વિચરણ
6. જો પોયસન વિતરણમાં $p(0) = 0.13534$ હોય તો મધ્યક શોધો.
   (a) 0.13534 (b) 2 (c) 1 (d) 0
7. જો પોયસન વિતરણમાં $p(x = 3) = p(x = 4)$ હોય તો પ્રા.વિ. શોધો.
   (a) 4 (b) 2 (c) 1 (d) 3
8. પોયસન ચલ x માટે વિતરણમાં $p(x > 0) = 1\text{-}e^{-2.5}$ હોય તો પોપસન વિતરણનો પ્રાચલ શોધો.
   (a) 1.58 (b) 0.03986 (c) 6.25 (d) 2.5

જવાબ : 1. c 2. c 3. c 4. a 5. a 6. b 7. b 8. 2.5

જવાબ : દ્વિપદી વિતરણ

6.

ખામીવાળા બલ્બ	0	1	2
સંભાવના	$6/15$	$8/15$	$1/15$

7.

લાલ દડાની સંખ્યા	0	1	2	3
સંભાવના	$4/84$	$30/84$	$40/84$	$10/84$

8.

સંખ્યાઓનો સરવાળો	2	3	4	5	6
સંભાવના	$1/15$	$4/15$	$4/15$	$5/15$	$1/15$

9.

મહત્તમ અંક	1	2	3	4	5	6
સંભાવના	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$

10. (1) 779 (2) 24 પેકેટ

11. (1) 0.8858 (2) 0.005537

12. (1) $\frac{280}{2187}$ (2) $\frac{2186}{2187}$

13. (1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ (2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$

14. $n = 9, \quad p = \frac{2}{3}$

15. મધ્યક = $\frac{3}{2}$ વિચરણ= $\frac{9}{4}$

16. (1) $\frac{3}{32}$ (2) $\frac{57}{64}$

17. 0.4294

18. (1) $\frac{1}{1048576}$ (2) $\frac{813564}{1048576}$

19. $p = \frac{3}{7}$

20. $\frac{252}{6536} = 0.0038$

પોયસન વિતરણ

6. 0.9994 7. 0.3233 8. સંભાવના = 0.01439, 2.88 $\cong$ 3 પાના 9. (1) 0.1954 (2) 0.2381

10. (1) 951 (2) 1 11. 0.2240 12. મધ્યક = 2, p (1) = 0.2707

13. p(3) = 0.1805 14. મધ્યક = 4.5 15. 0.8009

એકમ 8 આંકડાશાસ્ત્રીય નિર્ણય સિદ્ધાંત

8.1 પ્રસ્તાવના

આપણા રોજબરોજના જીવનમાં આપણે હંમેશા પરિસ્થિતિવશ નિર્ણયો લેતા હોઈએ છીએ.

દા.ત. (1) ઉચ્ચ અભ્યાસ માટે એક થી વધુ સંસ્થાઓમાં એડમિશન મળતું હોય તો કઈ સંસ્થા પસંદ કરવી.

(2) મહેમાન ઘરે જમવા આવવાના હોય તો કઈ મીઠાઈ બનાવવી.

(3) બચત કરવા માટે રૂપિયાનું કયાં રોકાણ કરવું.

ઉપરોક્ત બાબતો પરથી એ તો સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે આપણી પાસે ફક્ત એક જ વિકલ્પ હોય તો તે જ વિકલ્પ પસંદ કરવાનો નિર્ણય લેવો પડે, પરંતુ એક થી વધુ વિકલ્પો હોય તો આપણને સૌથી વધુ યોગ્ય હોય તે વિકલ્પની પસંદગીનો નિર્ણય આપણે કરીએ છીએ. આ શ્રેષ્ઠ વિકલ્પની પસંદગી માટેની આંકડાશાસ્ત્રીય પદ્ધતિઓનો અભ્યાસ આ પ્રકરણમાં હવે કરીશું.

8.2 અર્થ

જ્યારે સમસ્યાના ઉકેલ માટે આપણે જુદા જુદા વિકલ્પો પૈકી શ્રેષ્ઠ વિકલ્પ પસંદ કરવા ઇચ્છીએ, ત્યારે તે નિર્ણય ઘણી બધી બાહ્ય પરિસ્થિતિઓ પર નિર્ભર હોય છે. આ પરિસ્થિતિઓ નિર્ણય લેનારના નિયંત્રણમાં હોતી નથી. પરંતુ પાછલા અનુભવો અને કોઈ ચોક્કસ પદ્ધતિથી તે પરિસ્થિતિઓના બનવા અંગે અનુમાન કે અટકળ કરીને યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી શકાય છે. આપણે નિર્ણય હંમેશા પરિસ્થિતિઓની સંભવિતતાને આધારે લઈએ છીએ. તેથી લીધેલ નિર્ણય હંમેશા સંપૂર્ણ સાચો કે લાભદાયક નીવડે તે જરૂરી નથી.

નિર્ણયના સિદ્ધાંતનો અર્થ ટૂંકમાં નીચે મુજબ જણાવી શકાય.

''અનિયંત્રિત પરિસ્થિતિઓ હેઠળ જુદા જુદા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય નિર્ણય લેવાની પ્રક્રિયા એટલે નિર્ણયનો સિદ્ધાંત.''

નિર્ણયના સિદ્ધાંતમાં સામાન્ય રીતે નીચેની બાબતોનો સમાવેશ થઈ શકે.

(1) જે સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવાનો હોય તેની વિસ્તૃત જાણકારી.

(2) જુદા જુદા વિકલ્પોની પ્રાપ્યતાની જાણકારી.

(3) કોઈ પણ વિકલ્પની પસંદગી બાદ શક્ય તમામ પરિસ્થિતિઓ વિશેની જાણકારી

(4) નિર્ણય લીધા બાદ થતા નફા-નુકશાનની જાણકારી.

(5) ચોક્કસ ઢબે યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી

(6) યોગ્ય વિકલ્પ લીધા બાદ તેનું અમલીકરણ

8.3 નિર્ણયના સિદ્ધાંતના ઉપયોગો અને મર્યાદા

ઉપયોગો :

(1) સમસ્યાના ઉકેલ માટે શક્ય વિકલ્પોમાંથી જે તે પરિસ્થિતિ હેઠળ શ્રેષ્ઠ નિર્ણય લઈ શકાય છે.

(2) માત્ર અટકળ કે ધારણાને આધારે નહિ પરંતુ યોગ્ય આંકડાશાસ્ત્રીય રીતનો ઉપયોગ કરીને નિર્ણય લેવાથી તેની સચોટતા વધુ હોય છે.

(3) નિર્ણયના સિદ્ધાંતની મદદથી લીધેલા નિર્ણયો બીજી કોઈ પદ્ધતિ દ્વારા લેવાયેલ નિર્ણયો કરતા વધુ યોગ્ય હોય છે, તેથી નિર્ણય લેનાર માટે તે વધુ લાભદાયી નીવડે છે.

(4) જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓને ધ્યાનમાં રાખી નિર્ણયની પસંદગી થયેલ હોઈ નુકશાન થવાની શક્યતા પ્રમાણમાં ઓછી હોય છે.

મર્યાદાઓ :

(1) બધાં જ શક્ય વિકલ્પોની પૂરી જાણકારી ન હોય તો શ્રેષ્ઠ વિકલ્પની પસંદગી મુશ્કેલ બને છે.

(2) ભૂતકાળને આધારે પણ ભવિષ્યને ધ્યાનમાં રાખી શ્રેષ્ઠ નિર્ણય લેવો એ મુશ્કેલ કાર્ય છે.

(3) સમસ્યા વિશે અગાઉની માહિતી પ્રાપ્ય ન હોય તો નિર્ણયના સિદ્ધાંતની મદદથી વ્યાજબી નિર્ણય લેવો લગભગ અશક્ય બને છે.

(4) માહિતી, સમય, સ્રોત ચોકસાઈ વગેરે મર્યાદિત હોય તો તદ્દન યોગ્ય નિર્ણય લેવામાં ઘણી મુશ્કેલ પડે છે.

8.4 નિર્ણયના સિદ્ધાંતનું માળખું

નિર્ણયના સિદ્ધાંતમાં જુદી જુદી બાહ્ય પરિસ્થિતિઓને ધ્યાનમાં રાખી જુદા જુદા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરવામાં આવે છે. નિર્ણયના સિદ્ધાંતના માળખામાં મુખ્યત્વે નીચેના ઘટકોનો સમાવેશ થાય છે.

(1) વ્યૂહ (વિકલ્પ) અથવા ક્રિયાપથ

(2) ઘટના (પરિસ્થિતિ)

(3) પરિણામ

(4) વળતર (નફો-નુકસાન) શ્રેણિક

હવે, આપણે દરેક ઘટકની વિસ્તૃત સમજુતી મેળવી લઈએ.

(1) વ્યૂહ :

જ્યારે કોઈ સમસ્યા અંગે નિર્ણય લેવાનો હોય ત્યારે નિર્ણય લેનાર વ્યક્તિ પાસે જે જુદા-જુદા વિકલ્પો હોય છે, કે જે પૈકી કોઈ વિકલ્પની પસંદગી તેને કરવાની હોય છે તે વિકલ્પોને વ્યૂહ કહેવામાં આવે છે. કયો વિકલ્પ લેવો તે નિર્ણય લેનારના હાથમાં હોય છે.

દા.ત. (1) કોઈ વસ્તુનું વેચાણ વધારવા માટે કંપની વર્તમાન પત્રો, રેડિયો, ટી.વી. વગેરેમાંથી કોઈ એકમાં જાહેરાત આપવા માંગે તો કયુ માધ્યમ પસંદ કરવું તે નિર્ણય લેવા માટે તેની પાસે વર્તમાન પત્રો, રેડિયો, ટી.વી.એ ત્રણ વિકલ્પો એટલે કે વ્યૂહ થયા કહેવાય.

(2) એક રોકાણકારનો મ્યૂચ્યુઅલ ફંડ, ફિક્સ ડિપોઝિટ, શૅર માર્કેટ, રીઆલ્ટી માર્કેટમાંથી કોઈ એકમાં રોકાણ કરવું હોય તો આ ચાર તેના માટે વિકલ્પો (વ્યૂહ) થયા કહેવાય.

સામાન્ય રીતે જુદા જુદા વ્યૂહને A_1, A_2, A_3....... વગેરે દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

(2) ઘટના :

આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ ચોક્કસ વિકલ્પની પસંદગી બાદ જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓમાંથી કોઈ એક પરિસ્થિતિ ઉદ્‌ભવે છે. આ પરિસ્થિતિઓ નિર્ણય લેનારના નિયંત્રણમાં હોતી નથી. આવી પરિસ્થિતિઓને ઘટના કહેવાય છે.

દા.ત. (1) ખેડૂત ચોમાસાની ઋતુ શરૂ થાય તે પહેલા કયો પાક લેવો તે નક્કી કરે છે. ચોમાસા દરમ્યાન અતિભારે, મધ્યમ અથવા ઓછો વરસાદ પડી શકે છે. આ ત્રણ પરિસ્થિતિઓને ઘટના કહી શકાય.

(2) મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં નાણાં રોકવાનો નિર્ણય લીધા બાદ રોકાણકારને ખૂબ ફાયદો થાય, નહિવત ફાયદો થાય, થોડું નુકશાન જાય અથવા વધુ નુકશાન જાય એવું બની શકે, તો આ ચાર પરિસ્થિતિઓને ઘટના કહી શકાય.

સામાન્ય રીતે જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓ એટલે કે ઘટનાઓને S_1, S_2, S_3 …….. અથવા E_1, E_2, E_3 ……. વગેરે દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

(3) પરિણામ :

જુદા જુદા વિકલ્પોમાંથી કોઈ વિકલ્પની પસંદગી કર્યા બાદ શક્ય પરિસ્થિતિઓમાંથી કોઈ એક પરિસ્થિતિ ઉદ્‌ભવે છે. અને આ સંજોગોમાં નિર્ણય લેનારને લાભ કે ગેરલાભ એટલે કે નફો કે નુકશાન થાય છે. પાછલા અનુભવોને આધારે અથવા બીજી કોઈ રીતે પરિસ્થિતિઓ વિશે અટકળ એટલે કે સંભાવનાનું અનુમાન કરવામાં આવે છે. આ અનુમાન માત્ર કોઈ નિર્ણય લીધા બાદ તે યોગ્ય કે અયોગ્ય પૂરવાર થઈ શકે અને તેથી નિર્ણય લેનારને ફાયદો કે નુકશાન થઈ શકે છે. આ સમગ્ર સ્થિતિને નિર્ણયના સિદ્ધાંતના માળખાના સંદર્ભમાં પરિણામ કહી શકાય.

(4) વળતર (નફા-નુકશાન) શ્રેણિક :

કોઈ પણ વિકલ્પની પસંદગી બાદ કોઈ ચોક્કસ ઘટના બનવાથી નિર્ણય લેનારને જે કોઈ આર્થિક પરિણામ મળે તેને વળતર કહે છે. દા.ત. કોઈ નિર્ણય લેનાર પાસે ચાર વિકલ્પો હોય અને કોઈ પણ વિકલ્પની પસંદગીના નિર્ણય બાદ ત્રણ જુદી જુદી ઘટના (પરિસ્થિતિ)માંથી કોઈ ઘટના ઉદ્‌ભવી શકતી હોય તો આપણને $4 \times 3 = 12$ જુદા જુદા વળતરોની માહિતી મળે છે. આ બધાં જ વળતરોને વ્યૂહ અને ઘટનાને ધ્યાનમાં રાખી હાર-સ્તંભમાં ગોઠવવામાં આવે તો તેવી ગોઠવણીને વળતર શ્રેણિક કહે છે.

ધારો કે n વિકલ્પો A_1, A_2, A_3, ...A_n હોય અને m ઘટનાઓ S_1, S_2, S_3, ... S_m હોય તો m×n ક્રમનો વળતર શ્રેણિક નીચે મુજબ મળે.

ઘટના	(વ્યૂહ / વિકલ્પ)				
(પરિસ્થિતિ)	A_1	A_2	A_3	....	A_n
S_1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	....	x_{2n}
S_2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	....	x_{3n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
S_m	X_{m1}	X_{m2}	X_{m3}	....	X_{mn}

અહીં, X_{ij} = j મો વ્યૂહ પસંદ કર્યા બાદ iમી ઘટના ઉદ્‌ભવે ત્યારે મળતું આર્થિક વળતર

દા.ત. x_{23} ત્રીજો વ્યૂહ પસંદ કર્યા બાદ બીજી ઘટના બને તો નિર્ણય લેનારને ₹ x_{23} મળે.

નોંધ : x_{ij}ની ધન કિંમતો નિર્ણય લેનાર ને મળતો નફો દર્શાવે છે. જ્યારે ઋણ કિંમતો તેને થતી ખોટ દર્શાવે છે.

8.5 અનિયમિતતા હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિ

જ્યારે પણ જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓ એટલે કે ઘટનાઓ વિશે સંભાવનાના અનુમાનની કોઈ જ જાણકારી ન હોય ત્યારે અનિશ્ચતતા હેઠળ નિર્ણય લેવાની જરૂર પડે છે. હવે સ્પષ્ટ છે કે ભૂતકાળની માહિતી ન હોય તો કઈ ઘટના બનશે તેની સંભાવના મેળવી શકાતી નથી. આવા સંજોગોમાં નિર્ણય લેનાર દરેક વ્યક્તિ પોતાની સૂઝબૂઝ મુજબ અથવા માત્ર અટકળ કરી અંતઃસ્ફૂરણાથી તેને યોગ્ય જણાય તેવો નિર્ણય લે છે. દરેક વ્યક્તિ એક સમાન પરિસ્થિતિમાં જુદુ જુદુ વિચારતા હોય છે. તેથી જુદા જુદા પ્રકારે પરિસ્થિતિનો તાગ મેળવી પોતાની રીતે નિર્ણય લે છે.

કેટલાંક લોકો આશાવાદી હોય, કેટલાંક નિરાશાવાદી, જ્યારે કેટલાંક લોકો પોતે વિચારવાને બદલે બીજા મોટા ભાગના લોકો શું કરે છે તેમ વિચારી નિર્ણય લેતા હોય છે. તેથી અનિશ્ચિતતા હેઠળ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ નક્કી કરવા માટે નીચેની જુદી જુદી રીતોનો ઉપયોગ થાય છે.

(1) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત

(2) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(3) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત

(4) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

(5) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત

(1) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત :

જ્યારે પરિસ્થિતિની સંભાવના વિશે માહિતી ન હોય ત્યારે કેટલાંક લોકો જે આશાવાદી હોય છે, તે આ પદ્ધતિથી નિર્ણય લેતા હોય છે. અનિશ્ચિતતા હેઠળ પણ તેઓ મહત્તમ વળતર જ મેળવશે તેવી આશા રાખે છે, તેથી જ ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંતને આશાવાદી અભિગમ કહી શકાય.

આ સિદ્ધાંત અનુસાર સૌ પ્રથમ વળતર શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે મહત્તમ વળતર શોધવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ શોધેલા મહત્તમ વળતરો પૈકી પણ સૌથી મહત્તમ વળતર હોય તેવા વ્યૂહની પસંદગી કરવામાં આવે છે.

(2) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત :

જ્યારે પરિસ્થિતિની સંભાવના વિશે માહિતી ન હોય ત્યારે કેટલાંક લોકો જે નિરાશાવાદી હોય છે, તે આ પદ્ધતિથી નિર્ણય લેતા હોય છે. અનિશ્ચિતતા હેઠળ પણ તેઓ લઘુત્તમ વળતર મેળવશે તેવું નિરાશાવાદી વલણ રાખે છે. તેથી જ ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંતને નિરાશાવાદી અભિગમ કહી શકાય.

આ સિદ્ધાંત અનુસાર સૌ પ્રથમ વળતર શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે લઘુત્તમ વળતર શોધવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ શોધેલા લઘુત્તમ વળતરો પૈકી જે મહત્તમ વળતર હોય તેવા વ્યૂહની પસંદગી કરવામાં આવે છે.

(3) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત :

જ્યારે પરિસ્થિતિની સંભાવના વિશે માહિતી ન હોય ત્યારે કેટલાંક લોકો દરેક પરિસ્થિતિઓની સંભાવના સરખી છે તેવું ધારી લે છે.

આ સિદ્ધાંત અનુસાર દરેક વ્યૂહ માટે જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓથી મળતા વળતરોની મધ્યક (સરેરાશ) શોધવામાં આવે છે. આ બધી જ સરેરાશોમાંથી જે વ્યૂહ માટે સરેરાશ મહત્તમ થાય તે વ્યૂહ પસંદ કરવામાં આવે છે.

(4) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત :

આ સિદ્ધાંતમાં આશાવાદી અને નિરાશાવાદી અભિગમનો સમન્વય છે. આ સિદ્ધાંતમાં સૌથી મહત્તમ વળતર અને સૌથી લક્ષત્તમ વળતરને જ ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે.

આ સિદ્ધાંત મુજબ એક ગુણાંક α લેવામાં આવે છે જેને આપણે આશાવાદીનો ગુણાંક કહીશું, જ્યારે $(1-\alpha)$ ને નિરાશાવાદીના ગુણાંક તરીકે લેવામાં આવે છે. ગુણાંક α ની પસંદગી નિર્ણય લેનાર પર નિર્ભર કરે છે. α ની કિંમત 0 થી 1 સુધી હોય છે. એટલે કે $0 \le \alpha \le 1$. નિર્ણય લેનાર આશાવાદી હોય તો α ની કિંમત 1 ની નજીક અને નિરાશાવાદી હોય તો α ની કિંમત 0 ની નજીક હોય છે. હોર્વિચના સિદ્ધાંતને વાસ્તવવાદ (Realism) નો સિદ્ધાંત તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

હોર્વિચના સિદ્ધાંત મુજબ યોગ્ય વ્યૂહની પસંદગી કરવા માટે દરેક વ્યૂહ માટે નીચેનાની કિંમત શોધવામાં આવે છે.

$H = \alpha$ (મહત્તમ વળતર) + $(1-\alpha)$ (લઘુત્તમ વળતર)

જે વ્યૂહ માટે Hની કિંમત સૌથી વધુ મળે તે વ્યૂહ પસંદ કરવામાં આવે છે.

(5) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત :

આ સિદ્ધાંત અગાઉ ચર્ચા કરી તે સિદ્ધાંતોથી થોડો અલગ પડે છે. અત્યાર સુધીના સિદ્ધાંતોમાં વળતરોમાંથી મહત્તમ વળતર મળે તે મુજબ વ્યૂહની પસંદગી કરવામાં આવતી હતી. પરંતુ આ સિદ્ધાંતમાં મહત્તમ નુકશાનને ન્યૂનતમ કરવાનો પ્રયત્ન કરવામાં આવે છે.

અહીં ‘નુકશાન’ એટલે કોઈ પણ ઘટના બને ત્યારે જુદા જુદા વ્યૂહ પૈકી મહત્તમ વળતર આપતા વ્યૂહની પસંદગી ન થવાથી થતો આર્થિક ગેરલાભ. આવા નુકશાનને નિર્ણયની પ્રક્રિયામાં તક નુકશાન (Opportunity Loss) કહે છે.

સામાન્ય રીતે માહિતીમાં વળતર શ્રેણિક આપેલ હોય છે. તે પરથી દરેક પરિસ્થિતિ (ઘટના)માં મહત્તમ વળતર ધરાવતો વ્યૂહ પસંદ ન થવાથી થતા નુકશાનની ગણતરી કરી તક નુકશાનનો શ્રેણિક મેળવવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ તક નુકશાન શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે મહત્તમ નુકશાન શોધવામાં આવે છે. આ બધાં મહત્તમ નુકશાન પૈકી જે વ્યૂહ માટે લઘુત્તમ નુકશાન થતું હોય તે વ્યૂહની પસંદગી કરવામાં આવે છે.

નોંધ : ઉપરોક્ત બધાં જ સિદ્ધાંતો જ્યારે પરિસ્થિતિઓની સંભાવનાની જાણકારી ન હોય ત્યારે નિર્ણય લેનાર પોતાની આંતરસૂઝ મુજબ નિર્ણય લઈ વ્યૂહની પસંદગી કરે છે.

હવે આપણે ઉપરોક્ત સિદ્ધાંતો પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ કેવી રીતે નક્કી કરવામાં આવે છે તે સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ-1 : નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી (i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત (iii) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત $(\alpha = 0.6)$ મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

વળતર શ્રેણિક

	વ્યૂહ			
ઘટના	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	2	15	3	6
S_2	7	5	10	-1
S_3	12	-2	4	9

જવાબ :

	વ્યૂહ			
ઘટના	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	2	15	3	6
S_1	7	5	10	-1
S_1	12	-2	4	9
મહત્તમ	12	15	10	9
લઘુત્તમ	2	-2	3	-1
સરેરાશ વળતર	$\frac{2+7+12}{3} = 7$	$\frac{15+15-2}{3} = 6$	$\frac{3+10+4}{3} = 5.67$	$\frac{6-1+9}{3} = 4.67$

(i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ દરેક વ્યૂહના મહત્તમ વળતરો પૈકી સૌથી મહત્તમ વળતર 15 વ્યૂહ A_2 માટે મળે છે. તેથી આ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ A_2 ગણાય.

(ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત મુજબ દરેક વ્યૂહના લઘુત્તમ વળતરો પૈકી મહત્તમ વળતર 3 વ્યૂહ A_3 માટે મળે છે. તેથી આ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ A_3 ગણાય.

(iii) લાપ્લાસના સિદ્ધાંત મુજબ દરેક વ્યૂહની શોધેલી સરેરાશો પૈકી મહત્તમ સરેરાશ 7 વ્યૂહ A_1 માટે મળે છે. તેથી આ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ A_1 ગણાય.

(iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

અહીં, $\alpha = 0.6$ આપેલ છે, તેથી $1-\alpha = 1-0.6 = 0.4$ મળે. હવે દરેક વ્યૂહ માટે હોર્વિચના સૂત્ર Hની ગણતરી નીચે મુજબ છે.

$$H = \alpha \begin{pmatrix} \text{મહત્તમ} \\ \text{વળતર} \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} \text{લઘુત્તમ} \\ \text{વળતર} \end{pmatrix}$$

વ્યૂહ A_1 માટે : $H = 0.6\ (12) + 0.4\ (2)$

$= 7.2 + 0.8 = 8$

વ્યૂહ A_2 માટે : $H = 0.6\ (15) + 0.4\ (-2)$

$= 9 - 0.8 = \boxed{8.2}$

વ્યૂહ A_3 માટે : $H = 0.6\ (10) + 0.4\ (3)$

$= 6 + 1.2 = 7.2$

વ્યૂહ A_4 માટે : $H = 0.6\,(9) + 0.4\,(-1)$

$= 5.4 - 0.4 = 5$

ઉપરોક્ત વિગત પરથી જોઈ શકાય છે કે મહત્તમ વળતર 8.4 વ્યૂહ A_2 માટે મળે છે. તેથી હોર્વિચના સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ A_2 ગણાય.

ઉદાહરણ-2 : નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

વળતર શ્રેણિક			
	વ્યૂહ		
ઘટના	A_1	A_2	A_3
S_1	50	90	80
S_2	100	40	70
S_3	40	60	30

જવાબ : અહીં, લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધવા માટે સૌ પ્રથમ વળતર શ્રેણિક પરથી તક નુકશાન શ્રેણિક નીચે મુજબ મેળવવામાં આવે છે.

તક નુકશાન શ્રેણિક			
	વ્યૂહ		
ઘટના	A_1	A_2	A_3
S_1	90-50 = 40	90-90 = 0	90-80 = 10
S_2	100-100 = 0	100-40 = 60	100-70 = 30
S_3	60-40 = 20	60-60 = 0	60-30 = 30
(મહત્તમ નુકશાન)	40	60	30

તક નુકશાન શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે મહત્તમ નુકશાન અનુક્રમ 40, 60 અને 30 મળે છે, તે પૈકી લઘુત્તમ નુકશાન 30, વ્યૂહ A_3 માટે મળે છે.

તેથી, લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ A_3 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

ઉદાહરણ-3 : નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી (i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત (iii) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ			
ઘટના	**A**	**B**	**C**	**D**
E_1	5	8	-1	7
E_2	9	2	10	5
E_3	3	-4	6	3
E_4	0	11	8	-2

જવાબ : સૌ પ્રથમ વળતર શ્રેણિક પરથી ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત અને ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધીશું. ત્યારબાદ તક નુકશાન શ્રેણિક મેળવી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ મેળવીશું.

ઘટના	વ્યૂહ			
	A	B	C	D
E_1	5	8	-1	7
E_2	9	2	10	5
E_3	3	-4	6	3
E_4	0	11	8	-2
મહત્તમ	9	11	10	7
લઘુત્તમ	0	-4	-1	-2

(i) **ગુરુ ગુરુ સિદ્ધાંત** મુજબ દરેક વ્યૂહના મહત્તમ વળતરો પૈકી સૌથી મહત્તમ વળતર 11 વ્યૂહ B માટે મળે છે. તેથી આ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ B ગણાય.

(ii) **ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત** મુજબ દરેક વ્યૂહના લઘુત્તમ વળતરો પૈકી મહત્તમ વળતર 0 વ્યૂહ A માટે મળે છે. તેથી આ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ A ગણાય.

હવે આપણે નીચે મુજબ તક નુકશાન શ્રેણિક બનાવી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધીએ.

ઘટના	તક નુકશાન શ્રેણિક			
	A	B	C	D
E_1	8-5 = 3	8-8 = 0	8-(-1) = 9	8-7 = 1
E_2	10-9 = 1	10-2 = 8	10-10 = 0	10-5 = 5
E_3	6-3 = 3	6-(-4) = 10	6-6 = 0	6-3 = 3
E_4	11-0 = 11	11-111 = 0	11-8 = 3	11-(2) = 13
(મહત્તમ નુકશાન)	11	10	9	13

તક નુકશાન શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે મહત્તમ નુકશાન અનુક્રમે 11, 10, 9 અને 13 મળે છે. તે પૈકી લઘુતમ નુકશાન 9 વ્યૂહ C માટે મળે છે.

તેથી, લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ C શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

8.6 જોખમ હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિ

આપણે અગાઉ જે જે સિદ્ધાંતો જોયા તે જુદી જુદી ઘટનાઓની સંભાવનાની જાણકારી ન હોય ત્યારે કેવી રીતે નિર્ણય લઈ શકાય તે સૂચવે છે. હવે જ્યારે ભૂતકાળની માહિતી પરથી કે અન્ય કોઈ રીતે દરેક ઘટના બનવાની સંભાવના જાણતા હોઈએ તો નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિને જોખમ હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિ કહેવાય છે.

જોખમ હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિમાં નીચેની બે રીતોનો સમાવેશ થાય છે.

(1) અપેક્ષિત આર્થિક મૂલ્ય (અપેક્ષિત નાણાકીય કિંમત) ની રીત [Expected Monetary Value (EMV) Method]

(2) અપેક્ષિત તક નુકશાનની રીત [Expected Opportanity Loss (EOL) Method]

(1) અપેક્ષિત આર્થિક મૂલ્ય (EMV)ની રીત :

આંકડાશાસ્ત્રીય નિર્ણયના સિદ્ધાંતોમાં આ સૌથી પ્રચલિત રીત છે. સૌ પ્રથમ જો વળતર શ્રેણિક આપેલ ન હોય તો જુદા જુદા વ્યૂહ અને જુદી જુદી ઘટનાના સંયોજનથી મળતા આર્થિક પરિણામો

પરથી વળતર શ્રેણિક તૈયાર કરી શકાય છે. ત્યાર બાદ દરેક ઘટનાની સંભાવનાનું અનુમાન મેળવવામાં આવે છે. વળતર શ્રેણિક અને ઘટનાઓની સંભાવના વિશેની જાણકારીની મદદથી દરેક વ્યૂહ માટે અપેક્ષિત આર્થિક મૂલ્ય (EMV) ની ગણતરી કરવામાં આવે છે અને જે વ્યૂહ માટે EMV મહત્તમ મળે તે વ્યૂહ EMVની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણવામાં આવે છે.

દરેક વ્યૂહ માટે EMV શોધવા માટે તે વ્યૂહના જુદી જુદી ઘટનામાં મળતા વળતરને તે ઘટનાની સંભાવના સાથે ગુણાકાર કરી તેઓનો સરવાળો મેળવાય છે.

ટૂંકમાં, $EMV = \sum x_{ij} P_i$

જ્યાં, P_i = iમી ઘટનાની સંભાવના

x_{ij} = j માં વ્યૂહ અને iમી ઘટનાના સંયોજનથી મળતુ વળતર

ઉદાહરણ-4 : નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી અપેક્ષિત આર્થિક મૂલ્ય (EMV)ની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ			
ઘટના	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\mathbf{A_4}$
$\mathbf{S_1}$	100	900	400	700
$\mathbf{S_2}$	800	200	700	400
$\mathbf{S_3}$	400	600	200	800

ઘટના S_1, S_2 અને S_3 બને તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.3, 0.4 અને 0.3 છે.

જવાબ : દરેક વ્યૂહ માટે જુદી-જુદી ઘટના સમયે મળતા વળતરોને તેને અનુરૂપ સંભાવનાઓ સાથે ગુણીને સરવાળો કરી EMV નીચે મુજબ મેળવવામાં આવે છે.

		વ્યૂહ			
ઘટના	**સંભાવના** $(\mathbf{P_i})$	$\mathbf{A_1}$ $(\mathbf{x_{ii}.P_1})$	$\mathbf{A_2}$ $(\mathbf{x_{i2}.P_2})$	$\mathbf{A_3}$ $(\mathbf{x_{i3}.P_3})$	$\mathbf{A_4}$ $(\mathbf{x_{i4}.P_4})$
$\mathbf{S_1}$	0.3	$0.3\times100 = 30$	$0.3\times900 = 270$	$0.3\times400 =$ '10	$0.3\times700 = 210$
$\mathbf{S_2}$	0.4	$0.4\times800 = 320$	$0.4\times200 = 80$	$0.4\times700 = 280$	$0.4\times400 = 160$
$\mathbf{S_3}$	0.3	$0.3\times400 = 120$	$0.3\times600 = 180$	$0.3\times200 = 60$	$0.3\times800 = 240$
	EMV =	470	530	460	610

અહીં, જોઈ શકાય છે કે EMVની મહત્તમ કિંમત 610 વ્યૂહ A_4 માટે મળે છે, તેથી વ્યૂહ A_1 EMV ની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ છે તેમ કહેવાય.

નોંધ : સરળતા ખાતર હવેથી ઉદાહરણોમાં જુદા જુદા વ્યૂહના વળતરોને x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}..........x_{in} ને બદલે ફક્ત x_1, x_2, x_3 .... x_n લખીશું.

ઉદાહરણ-5 : એક દુકાનદાર ઉત્પાદક પાસેથી એક વસ્તુ ખરીદે છે. તેની એકમ દીઠ ખરીદ કિંમત ₹ 10 છે અને દુકાનદાર તે વસ્તુ એકમ દીઠ ₹ 15 માં વેચે છે. દિવસ દરમિયાન ન વેચાયેલી વસ્તુ તે ઉત્પાદકને ₹ 8માં પરત કરે છે. દિવસ દરમિયાન તે વસ્તુની માંગનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે.

વસ્તુની માંગ (એકમો)	0	1	2	3	4
સંભાવના	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

તો તે દુકાનદારે દરરોજ વસ્તુના કેટલા એકમો રાખવા જોઈએ કે જેથી તેનો નફો મહત્તમ થાય ?

જવાબ : સૌ પ્રથમ આપણે એકમ દીઠ નફો અને ખોટ મેળવીશું.

ખરીદ કિંમત ₹ = 10; વેચાણ કિંમત = ₹ 15; પરત કિંમત = ₹ 8

નફો = વેચાણ કિંમત - ખરીદ કિંમત = 15 - 10 = ₹ 5

ખોટ = ખરીદ કિંમત - પરત કિંમત = 10 - 8 = ₹ 2

હવે જુદા જુદા વ્યૂહ (ખરીદેલ એકમો) અને જુદી જુદી ઘટનાઓ (વેચાયેલ એકમો) માટેના વળતરો નીચે મુજબ શોધીએ.

વળતર = (વેચાયેલ એકમો × નફો) - (ન વેચાયેલ એકમો × ખોટ)

જો 0 વસ્તુ ખરીદે :

સ્વભાવિક છે કે જો 0 વસ્તુ એકમો ખરીદે તો માંગ ગમે તેટલા એકમો હોય કોઈ નફો કે નુકશાન થાય નહિ તેથી બધી જ માંગ માટે વળતર 0 જ રહેશે.

★ **જો 1 વસ્તુ ખરીદે :**

માંગ 0 હોય ત્યારે, વળતર = $(0\times5) - (1\times2) = 0-2 = -2$

માંગ 1 હોય ત્યારે, વળતર = $(1\times5) - (0\times2) = 5-0 = 5$

માંગ 1 થી વધુ હશે ત્યારે વળતર 5 જ રહેશે કેમકે 1 જ વસ્તુ ખરીદેલ છે.

★ **જો 2 વસ્તુ ખરીદે તો :**

માંગ 0 હોય ત્યારે, વળતર = $(0\times5) - (2\times2) = 0-4 = -4$

માંગ 1 હોય ત્યારે, વળતર = $(1\times5) - [(2-1)\times2] = 5 - 2 = 3$

માંગ 2 હોય ત્યારે, વળતર = $(2\times5) - [(2-2)\times2] = 10-0 = 10$

માંગ 2 થી વધુ હોય ત્યારે વળતર 10 જ રહેશે કેમ કે 2 જ વસ્તુ ખરીદેલ છે.

આ રીતે જ જ્યારે 3, 4 અને 5 વસ્તુ ખરીદે ત્યારે જુદી જુદી માંગ માટે વળતરોની ગણતરી કરી નીચે મુજબ વળતર શ્રેણિક મેળવવામાં આવે છે.

માંગ (ઘટના)	સંભાવના	ખરીદેલ એકમો (વ્યૂહ)				
		0 (x_1)	1 (x_2)	2 (x_3)	3 (x_4)	4 (x_5)
0	0.1	0	-2	-4	-6	-8
1	0.2	0	5	3	1	-1
2	0.3	0	5	10	8	6
3	0.2	0	5	10	15	13
4	0.2	0	5	10	15	20

હવે, ઉપર મેળવેલા વળતર શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે EMV નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

EMV કોષ્ટક					
ઘટના	x_1p_i	x_2p_i	x_3p_i	x_4p_i	x_5p_i
0	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8
1	0	1	0.6	0.2	-0.2
2	0	1.5	3	2.4	1.8
3	0	1	2	3	2.6
4	0	1	2	3	4
EMV =	0	4.3	7.2	$\boxed{8}$	7.4

અહીં 3 વસ્તુ ખરીદવા માટે EMVની મહત્તમ કિંમત 8 મળે છે. તેથી દુકાનદારે દરરોજ 3 એકમો ઉત્પાદક પાસેથી ખરીદવા જોઈએ.

ઉદાહરણ-6 : એક વસ્તુનું ઉત્પાદન ખર્ચ ₹ 5 છે અને તેની એકમદીઠ વેચાણ કિંમત ₹ 10 છે. જો તે વસ્તુ અઠવાડિયા દરમિયાન ન વેચાય તો નકામી થઈ જાય છે. તેના અઠવાડિયાના વેચાણની માહિતી નીચે મુજબ છે.

અઠવાડિક માંગ	10	15	30	50
અઠવાડિયાની સંખ્યા	5	20	20	5

તો ઉત્પાદકે દર અઠવાડિયે કેટલા એકમો બનાવવા જોઈએ ?

જવાબ : અહીં અઠવાડિક માંગ (ઘટના)ની સંભાવના આપેલ નથી પરંતુ તે માંગ કેટલા અઠવાડિયા માટે છે તે સંખ્યા આપેલ છે તે પરથી દરેક માંગ માટે સંભાવના શોધી શકાય. કુલ 5+20+20+5 = 50 અઠવાડિયાની માહિતી આપેલી છે. હવે માંગ 10 એકમો હોય તેવા અઠવાડિયાની સંખ્યા 50 માંથી 5 છે તેથી તેની સંભાવના $\frac{5}{50} = 0.1$ થાય. તે જ રીતે અન્ય આપેલી માંગ માટે સંભાવનાઓ અનુક્રમે $\frac{20}{50} = 0.4; \frac{20}{50} = 0.4$ અને $\frac{5}{50} = 0.1$ થશે.

હવે, એકમ દીઠ નફો અને ખોટ મેળવીએ.

ઉત્પાદન ખર્ચ = ₹ 5, વેચાણકિંમત = ₹ 10

તેથી નફો = વેચાણ કિંમત - ઉત્પાદન ખર્ચ = 10 - 5 = ₹ 5 થશે. ન વેચાયેલી વસ્તુ નકામી થઈ જાય છે તેથી એકમ દીઠ ખોટ તેના ઉત્પાદન ખર્ચ જેટલી જ એટલે કે ₹ 5 થશે. હવે ઉદાહરણ 5માં દર્શાવેલ સમજુતીની જેમ જ આ ઉદાહરણમાં વળતરોની ગણતરી કરી નીચે મુજબ વળતર શ્રેણિક મળે.

વળતર શ્રેણિક બનાવેલા એકમો (વ્યૂહ)					
માંગ (ઘટના)	સંભાવના p_i	10 (x_1)	15 (x_2)	30 (x_3)	50 (x_4)
10	0.1	50	25	-50	-150
15	0.4	50	75	0	-100
30	0.4	50	75	150	50
50	0.1	50	75	150	250

હવે ઉપર મેળવેલા વળતર શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે EMV નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

EMV કોષ્ટક બનાવેલા એકમો (વ્યૂહ)				
માંગ (ઘટના)	10 $(x_1.p_i)$	15 $(x_2.p_i)$	30 $(x_3.p_i)$	50 $(x_4.p_i)$
10	5	2.5	-5	-15
15	20	30	0	-40
30	20	30	60	20
50	5	7.5	15	25
EMV =	50	$\boxed{70}$	$\boxed{70}$	-10

અહીં 15 અને 30 વસ્તુ બનાવે તો મહત્તમ EMV 70 મળે છે. તેથી ઉત્પાદકે દર અઠવાડિયે 15 એકમો અથવા 30 એકમો બનાવવા જોઈએ.

(2) અપેક્ષિત તક નુકશાનની રીત (EOLની રીત)

આપણે અગાઉ EMVની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. તેજ રીતે તક નુકશાન શ્રેણિક વળતર શ્રેણિક પરથી મેળવી દરેક વ્યૂહ માટે અપેક્ષિત તક નુકશાનની કિંમતો શોધવામાં આવે છે. જે વ્યૂહ માટે અપેક્ષિત તક નુકશાન (EOL) સૌથી ઓછું મળે તે વ્યૂહની પસંદગી કરવામાં આવે છે.

$EOL = \sum O_{ij}.p_i$

જ્યાં p_i = iમી ઘટનાની સંભાવના

O_{ij} = j માં વ્યૂહ અને iમી ઘટનાના સંયોજનથી મળેલ તક નુકશાન

નોંધ : (1) તક નુકશાન (O_{ij}) કેવી રીતે મેળવાય તેની ચર્ચા આપણે અગાઉ લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંતની સમજુતી અને તેના ઉદાહરણ (નં. 2)માં વિસ્તૃત રીતે કરેલ છે.

(2) EMV અને EOL આ બંને રીતે લીધેલ નિર્ણયો સરખા હોય છે, કારણકે આ બંને રીતો એકબીજાની પૂરક છે.

ઉદાહરણ-7 : નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી EOL ની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

		વ્યૂહ		
ઘટના	સંભાવના	A_1	A_2	A_3
S_1	0.3	20	70	60
S_2	0.5	90	50	40
S_3	0.2	50	40	80

જવાબ : આપણે જાણીએ છીએ કે સૌ પ્રથમ તક નુકશાન શ્રેણિક મેળવવો પડશે અને ત્યાર બાદ જ અપેક્ષિત તક નુકશાન (EOL) દરેક વ્યૂહ માટે શોધી શકાશે.

		તક નુકશાન શ્રેણિક		
ઘટના	સંભાવના	A_1	A_2	A_3
S_1	0.3	70-20 = 50	70-70 = 0	70-60 = 10
S_2	0.5	90-90 = 0	90-50 = 40	90-40 = 50
S_3	0.2	80-50 = 30	80-40 = 40	80-80 = 0

હવે દરેક વ્યૂહ માટે જુદી જુદી ઘટનાઓની સંભાવના અને તેને અનુરૂપ તક નુકશાનના ગુણાકારોનો સરવાળો કરી (EOL) ની કિંમતો નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે.

ઘટના	EOL કોષ્ટક વ્યૂહ		
	A_1	A_2	A_3
S_1	0.3×50 = 15	0.3×0 = 0	0.3×10 = 3
S_2	0.5×0 = 0	0.5×40 = 20	0.5×50 = 25
S_3	0.2×30 = 6	0.2×40 = 8	0.2×0 = 0
EOL =	21	98	28

ઉપરના EOL કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય છે કે સૌથી ઓછું અપેક્ષિત તક નુકશાન (EOL) વ્યૂહ A_1 માટે મળે છે. તેથી EOL ની રીતે વ્યૂહ A_1 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

ઉદાહરણ-8 : નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી

(i) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત (ii) EMV (iii) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત અને (iv) EOL પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

		વ્યૂહ			
ઘટના	સંભાવના	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	0.2	5	3	9	-1
S_2	0.3	10	-2	6	5
S_3	0.3	6	8	-3	11
S_4	0.2	-2	9	5	2

જવાબ : વળતર શ્રેણિક પરથી ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત અને EMVની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધી શકાય અને લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત અને EOLની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધવા માટે તક નુકશાન શ્રેણિકનો ઉપયોગ થાય છે.

(i) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ મેળવવા દરેક વ્યૂહમાંથી લઘુત્તમ વળતરો -2, -2, -3 અને -1 અનુક્રમે મળે છે. આ બધાં જ લઘુત્તમ વળતરોમાંથી મહત્તમ વળતર -1 વ્યૂહ A_4 માટે મળે છે. તેથી ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે A_4 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

(ii) હવે વળતર શ્રેણિક પરથી દરેક વ્યૂહ માટે EMVની કિંમતો નીચે મુજબ EMV કોષ્ટક બનાવીને શોધીએ દરેક ઘટનાની સંભાવના p_i વડે અને દરેક વ્યૂહની વળતરની કિંમતોને x_1, x_2, x_3, x_4 વડે દર્શાવીએ તો EMVની કિંમતો નીચે પ્રમાણે મળે.

EMV કોષ્ટક				
		વ્યૂહ		
ઘટના	A_1 $(x_1.p_i)$	A_2 $(x_2.p_i)$	A_3 $(x_3.p_i)$	A_4 $(x_4.p_i)$
S_1	1	0.6	1.8	-0.2
S_2	3	-0.6	1.8	1.5
S_3	1.8	2.4	-0.9	3.3
S_4	-0.4	1.8	1	0.4
EMV =	5.4	4.2	3.7	5.0

અહીં જોઈ શકાય છે કે EMVની મહત્તમ કિંમત 5.4 વ્યૂહ A માટે મળે છે. તેથી EMVની રીતે A_1 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

હવે, વળતર શ્રેણિક પરથી તક નુકશાન શ્રેણિક નીચ મુજબ મેળવી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત અને EOLની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધીએ.

ઘટના	સંભાવના	તક નુકશાન શ્રેણિક વ્યૂહ A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	0.2	9-5 = 4	9-3 = 6	9-9 = 0	9-(-1) = 10
S_2	0.3	10-10 = 0	10-(-2) = 12	10-6 = 4	10-5 = 5
S_3	0.3	11-6 = 5	11-8 = 3	11-(-3) = 14	11-11 = 0
S_4	0.2	9-(-2) = 11	9-9 = 0	9-5 = 4	9-2 = 7
મહત્તમ નુકશાન		11	12	14	10

અહીં જોઈ શકાય છે કે દરેક વ્યૂહમાંથી મહત્તમ તક નુકશાન પૈકી સૌથી ઓછું તક નુકશાન 10 વ્યૂહ A_4 માટે મળે છે. તેથી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે A_4 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

હવે EOL ની રીત માટે દરેક વ્યૂહના તક નુકશાનને તેને અનુરૂપ ઘટનાની સંભવના સાથે ગુણાકારો કરી તેઓનો સરવાળો કરી EOL નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે.

ઘટના	EOL કોષ્ટક વ્યૂહ A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	0.8	1.2	0	2
S_2	0	3.6	1.2	1.5
S_3	1.5	0.9	4.2	0
S_4	2.2	0	0.8	1.4
EOL =	4.5	5.7	6.2	4.9

અહીં જોઈ શકાય છે કે સૌથી ઓછું અપેક્ષિત તક નુકશાન (EOL) 4.5 વ્યૂહ A_1 માટે મળે છે. તેથી EOLની રીતે A_1 વ્યૂહ એ શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ ગણાય.

નોંધ : આ ઉદાહરણ પરથી જોઈ શકાય છે કે EMV અને EOL બંને રીતે નિર્ણય સરખા (વ્યૂહ A_1ની પસંદગી) જ હોય છે.

સ્વાધ્યાય

1. નીચે આપેલ પ્રશ્ન માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પની પસંદગી કરો.

(i) ચાર વ્યૂહ A_1, A_2, A_3 અને A_4 માટે તેમના મહત્તમ વળતરો અનુક્રમે 2, 8, 9 અને 7 છે. ગુરુ સિદ્ધાંત મુજબ કયો વ્યૂહ શ્રેષ્ઠ ગણાય ?

(a) A_1 (b) A_2 (c) A_3 (d) A_4

(ii) ત્રણ વ્યૂહ A, B અને C માટે તેમના લઘુત્તમ વળતરો અનુક્રમે 50, 70 અને 40 છે. ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત મુજબ કયો વ્યૂહ શ્રેષ્ઠ ગણાય ?

(a) A (b) B (c) C (d) બધાં જ

(iii) ત્રણ ઘટનાઓની સંભાવના અનુક્રમે 0.2, 0.4, 0.4 છે અને કોઈ ચોક્કસ વ્યૂહ પસંદ કરવાથી મળતા વળતરો અનુક્રમે 10, 20 ને 15 છે તો તે વ્યૂહની EMVની કિંમત શોધો.

(a) 33 (b) 16 (c) 34 (d) આમાંથી એક પણ નહિ.

(iv) નીચેનામાંથી કયા સિદ્ધાંતને આશાવાદી અભિગમ તરીકે પણ ઓળખાય છે ?

(a) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (b) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(c) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (d) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત

(v) નીચેનામાંથી કયા સિદ્ધાંતને નિરાશાવાદી અભિગમ તરીકે પણ ઓળખાય છે ?

(a) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (b) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(c) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (d) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

(vi) કયા સિદ્ધાંતમાં બધી જ ઘટનાઓની સંભાવના સરખી છે તેમ ધારી લેવામાં આવે છે ?

(a) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (b) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(c) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (d) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

(vii) કયા સિદ્ધાંતને આશાવાદી અને નિરાશાવાદી અભિગમોનો સમન્વય એટલે કે મધ્યમાર્ગી અભિગમ ગણવામાં આવે છે ?

(a) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (b) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(c) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (d) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

(viii) હોર્વિચના સિદ્ધાંતનો આશાવાદીનો ગુણાંક α ની સીમા જણાવો.

(a) $-1 \le \alpha \le 1$ (b) $-\infty \le \alpha \le \infty$

(c) $0 \le \alpha \le 1$ (d) આમાંથી એક પણ નહિ.

(ix) નીચેનામાંથી કઈ પદ્ધતિને જોખમ હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિ કહેવાય ?

(a) EMV ની રીત (b) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત

(c) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (d) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત

(x) જ્યારે ઘટના E_1 બને ત્યારે વ્યૂહ A_1, A_2, A_3 ની પસંદગી કરવાથી મળતા વળતરો અનુક્રમે 12, 20 અને 25 છે. જો વ્યૂહ A_2 પસંદ કરીએ અને ઘટના E_1 બને તો તક નુકશાન કેટલું થાય ?

(a) 20 (b) 5 (c) 57 (d) 45

2. નીચેના પ્રશ્નોના એક કે બે વાક્યમાં જવાબ આપો.

(i) નિર્ણયનો સિદ્ધાંત એટલે શું ?

(ii) નિર્ણયના સિદ્ધાંતના ઘટકોના નામ આપો.

(iii) વ્યૂહ એટલે શું ?

(iv) ઘટના એટલે શું ?

(v) વળતર શ્રેણિક એટલે શું ?

(vi) અનિશ્ચિતતા હેઠળ નિર્ણય લેવાની પદ્ધતિઓ પૈકી કોઈ પણ બે સિદ્ધાંતના નામ જણાવો.

(vii) તક નુકશાનની કિંમત ઋણ હોઈ શકે કે કેમ ?

(viii) EMV અને EOLની રીતોથી લેવાતા નિર્ણય સરખાં જ હોય છે કે કેમ ?

3. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) નિર્ણયના સિદ્ધાંતનો અર્થ જણાવી તેના ઘટકો સમજાવો.

(2) અનિશ્ચિતતા હેઠળ નિર્ણય લેવાની જુદી જુદી રીતો સમજાવો.

(3) EMVની રીત વિશે ટૂંકનોંધ લખો.

(4) લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત સમજાવો.

(5) EOLની રીત સમજાવો.

(6) નિર્ણયના સિદ્ધાંતના ઉપયોગો અને મર્યાદા જણાવો.

4. નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી

(i) ગુરુ ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(iii) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત $(\alpha = 0.8)$ પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ			
ઘટના	A	B	C	D
E_1	5	8	-3	12
E_2	10	-2	9	6
E_3	0	7	5	-4

5. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી

(i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(iii) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત $(\alpha = 0.7)$ પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ				
ઘટના	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
S_1	10	25	10	15	20
S_2	-5	10	-5	10	-5
S_3	15	5	10	10	10

6. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી

(i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(iii) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત $(\alpha = 0.6)$ પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ		
ઘટના	P	Q	R
x	8	-4	14
y	0	12	6
z	-10	18	0
w	6	-2	8

7. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી,

(i) ગુરુ-ગુરુ સિદ્ધાંત (ii) ગુરુ-લઘુ સિદ્ધાંત

(iii) લાપ્લાસનો સિદ્ધાંત (iv) હોર્વિચનો સિદ્ધાંત $(\alpha = 0.4)$ પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ			
ઘટના	A_1	A_2	A_3	A_4
E_1	10	40	20	30
E_2	20	12	30	28
E_3	30	20	35	16
E_4	40	30	15	22

8. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી અપેક્ષિત આર્થિક મૂલ્ય (EMV) ની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ મેળવો.

		વ્યૂહ			
ઘટના	સંભાવના	A	B	C	D
E_1	0.4	15	50	10	15
E_2	0.3	20	15	50	10
E_3	0.2	40	20	15	50
E_4	0.1	60	40	20	15

9. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી EMVની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

		વ્યૂહ		
ઘટના	સંભાવના	A_1	A_2	A_3
S_1	0.2	-10000	20000	-30000
S_2	0.3	30000	25000	-5000
S_3	0.5	50000	30000	60000

10. એક વસ્તુની પડતર કિંમત ₹ 30 છે. અને તેની વેચાણ કિંમત એકમ દીઠ ₹ 20 છે. દિવસ દરમ્યાન વસ્તુ ન વેચાય તો નકામી થઈ જાય છે. વસ્તુની માંગનું વિતરણ નીચે મુજબ છે.

માંગ	0	1	2	3	4
સંભાવના	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

મહત્તમ નફો મેળવવા દરરોજ એકમો બનાવવા જોઈએ ?

11. એક વસ્તુનું ઉત્પાદન ખર્ચ ₹ 10 છે અને તેની વેચાણકિંમત ₹ 15 છે. દિવસ દરમિયાન ન વેચાયેલ વસ્તુઓ એકમ દીઠ ₹ 8માં દિવસના અંતે પરત કરવામાં આવે છે. વસ્તુની દૈનિક માંગનું વિતરણ નીચે મુજબ છે.

માંગ	10	15	20	25
સંભાવના	0.2	0.3	0.3	0.2

મહત્તમ નફો મેળવવા કેટલા એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

12. એક વસ્તુની ખરીદ કિંમત ₹ 6 અને વેચાણ કિંમત ₹ 10 છે. જો તે વસ્તુ ન વેચાય તો ₹ 4 માં પરત કરવામાં આવે છે. વસ્તુની માંગનું વિતરણ નીચે મુજબ છે.

માંગ (એકમો)	20	21	22	23	24
સંભાવના	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

13. એક ચોકલેટની પડતર કિંમત ₹ 5 છે. અને તેની વેચાણ કિંમત ₹ 10 છે. જો અઠવાડિયા દરમિયાન ચોકલેટ ન વેચાય તો તે નકામી થઈ જાય છે. નીચેની માહિતી પરથી EMVની રીતનો ઉપયોગ કરી દર અઠવાડિયે કેટલી ચોકલેટનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ તે જણાવો.

અઠવાડિક માંગ	10	20	25	50
અઠવાડિયાની સંખ્યા	5	15	25	5

14. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ મેળવો.

	વ્યૂહ		
ઘટના	A_1	A_2	A_3
E_1	12	7	3
E_2	4	10	6
E_3	8	2	7

15. નીચેના વળતર શ્રેણિક પરથી લઘુ-ગુરુ સિદ્ધાંત પ્રમાણે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

	વ્યૂહ			
ઘટના	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	20	50	-10	70
S_2	80	-20	60	40
S_3	10	70	40	-10

16. નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી EOL ની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ શોધો.

		વ્યૂહ		
ઘટના	સંભાવના	A	B	C
E_1	0.2	40	-10	-100
E_2	0.7	400	440	400
E_3	0.1	650	720	760

17. નીચે આપેલ વળતર શ્રેણિક પરથી અપેક્ષિત તક નુકશાનની રીતે શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ નક્કી કરો.

		વ્યૂહ		
પરિસ્થિતિ	સંભાવના	A_1	A_2	A_3
S_1	0.5	-35	120	-100
S_2	0.1	250	-350	200
S_3	0.4	550	650	700

જવાબો :

1. (i) (c) (ii) (b) (iii) (b) (iv) (c) (v) (b)
(vi) (c) (viii) (d) (iii) (c) (ix) (a) (x) (b)

2. (viii) તક-નુકશાનની કિંમત ઋણ ન હોઈ શકે.
(viii) હા, બંને રીતોથી નિર્ણય સમાન હોય છે.

4. (i) D (ii) A (iii) A (iv) D

5. (i) A_2 (ii) A_4 (iii) A_2 (iv) A_2

6. (i) Q (ii) R (iii) R (iv) Q

7. (i) A_1 અથવા A_2 (ii) A_4 (iii) A_2 (iv) A_2

8. વ્યૂહ B માટે મહત્તમ EMV = 32.5

9. વ્યૂહ 2 એકમો માટે મહત્તમ EMV = 32000

10. વ્યૂહ 2 એકમો માટે મહત્તમ EMV = 8

11. વ્યૂહ 20 એકમો માટે મહત્તમ EMV = 75

12. વ્યૂહ 23 એકમો માટે મહત્તમ EMV = 86.6

13. વ્યૂહ 35 એકમો માટે મહત્તમ EMV = 105

14. વ્યૂહ A_1 અથવા A_2

15. વ્યૂહ A_1

16. વ્યૂહ B શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ અને લઘુત્તમ EOL = 14

17. વ્યૂહ A_2 શ્રેષ્ઠ વ્યૂહ અને લઘુત્તમ EOL = 80

BAOU
Education for All

યુનિવર્સિટી ગીત

સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ
સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ
સ્વાધ્યાયઃ પરમં તપઃ

શિક્ષણ, સંસ્કૃતિ, સદ્ભાવ, દિવ્યબોધનું ધામ
ડૉ. બાબાસાહેબ આંબેડકર ઓપન યુનિવર્સિટી નામ;
સૌને સૌની પાંખ મળે, ને સૌને સૌનું આભ,
દશે દિશામાં સ્મિત વહે હો દશે દિશે શુભ-લાભ.

અભણ રહી અજ્ઞાનના શાને, અંધકારને પીવો ?
કહે બુદ્ધ આંબેડકર કહે, તું થા તારો દીવો;
શારદીય અજવાળા પહોંચ્યાં ગુર્જર ગામે ગામ
ધ્રુવ તારકની જેમ ઝળહળે એકલવ્યની શાન.

સરસ્વતીના મયૂર તમારે ફળિયે આવી ગહેકે
અંધકારને હડસેલીને ઉજાસના ફૂલ મહેંકે;
બંધન નહીં કો સ્થાન સમયના જવું ન ઘરથી દૂર
ઘર આવી મા હરે શારદા દૈન્ય તિમિરના પૂર.

સંસ્કારોની સુગંધ મહેંકે, મન મંદિરને ધામે
સુખની ટપાલ પહોંચે સૌને પોતાને સરનામે;
સમાજ કેરે દરિયે હાંકી શિક્ષણ કેરું વહાણ,
આવો કરીયે આપણ સૌ
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
દિવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ...
ભવ્ય રાષ્ટ્ર નિર્માણ

DR. BABASAHEB AMBEDKAR OPEN UNIVERSITY
(Established by Government of Gujarat)
'Jyotirmay' Parisar,
Sarkhej-Gandhinagar Highway, Chharodi, Ahmedabad-382 481
Website : www.baou.edu.in